

इकाई 9 ऋणात्मक संख्याएं

इकाई की रूपरेखा	पृष्ठ संख्यां
9.1 परिचय	5
उद्देश्य	6
9.2 ऋणात्मक संख्या क्या है?	6
9.3 सचिन्ह संख्याओं पर संक्रियाएं	12
जोड़ना	12
घटाना	14
9.4 सारांश	16
9.5 अभ्यासों पर टिप्पणियां	16

9.1 परिचय

कुछ महीने पहले की बात है, मैं कक्षा 7 से 10 तक के कोई 20 बच्चों से बातचीत कर रही थी। अन्य चीजों के अलावा मैंने उनसे यह भी पूछा कि ऋणात्मक संख्या क्या होती है। अधिकतर बच्चों का जवाब वही था जो युवराज ने दिया। उसने मेरे सवाल पर थोड़ी देर सोचा और बोल पड़ा, "आपका मतलब पूर्णांक? हां, ये संख्याएं....आं.....शून्य के उस तरफ वाले बिन्दु होते हैं।" जाहिर है कि उसका इशारा संख्या रेखा पर उनके निरूपण की तरफ था। जब पूछा गया कि इन संख्याओं का उपयोग कहाँ होता है, तो थोड़ा सोचकर उसने बताया, "लाभ-हानि में।" "कैसे? एक उदाहरण बताओ।" वह न बता सका।

आखिर, युवराज और अन्य बच्चे यह क्यों नहीं समझ पाते कि ऋणात्मक संख्याएं क्या हैं, और उन पर संक्रियाएं कैसे लागू होती हैं? एक तो इन्हें सिखाने का तरीका बहुत बोझिल होता है। और दूसरे, बच्चों को ऐसी संख्याएं सीखने की वजह भी समझ नहीं आती। हो सकता है कि खुद शिक्षकों को भी यह पता नहीं होता कि इन संख्याओं का उपयोग विज्ञान, व्यापार व गणित में व्यापक रूप से होता है। जैसे-जैसे हमारा समाज टेक्नोलॉजी में आगे बढ़ रहा है, वैसे-वैसे ऋणात्मक संख्याओं तथा अन्य गणितीय अवधारणाओं को सीखने का महत्त्व भी बढ़ता जा रहा है। इसलिए यह जरूरी हो जाता है कि बच्चे ऋणात्मक संख्याओं का अध्ययन करें व उन्हें समझें तथा यह भी सीखें कि उन पर बुनियादी संक्रियाएं कैसे लागू की जाएं।

ऐतिहासिक रूप से, गणितज्ञों ने ऋणात्मक संख्याओं की जरूरत तब महसूस की, जब उनका सामना ऐसी परिस्थितियों से हुआ जहां छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को घटाना पड़ा, उदाहरण के लिए, $4x + 10 = 2$ जैसे समीकरण को हल करने के लिए। यूनानी गणितज्ञ डायोफैण्टस (275 ईस्वी के लगभग) ने ऐसी समीकरणों को 'absurd' (यानी 'बेतुका') कहा क्योंकि इसका हल $x = -2$ ही आ सकता है, जो उनके लिए एक 'बेतुकी' संख्या थी। इन हलों को सार्थक बनाने के लिए उन्हें जरूरी लगा कि ये नई संख्याएं निर्मित करके इन्हें अर्थ दिया जाए। इसमें से ऋणात्मक संख्याएं व उन पर संक्रियाएं उभरीं। ब्रह्मगुप्त (630 ईस्वी के लगभग) ऐसी संख्याओं के इस्तेमाल को दर्ज करने वाले पहले भारतीय गणितज्ञ थे। उन्होंने इन संख्याओं पर संक्रियाएं लागू करने के नियमों का भी स्पष्ट उल्लेख किया है।

जब से ऋणात्मक संख्याएं बनी हैं; तब से लोगों ने धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं के बीच फर्क बताने के लिए किसी चिन्ह के उपयोग की जरूरत महसूस की है। उदाहरण के लिए, प्राचीन यूनानी लोग 'ऋण 3' को दर्शाने के लिए Π 3 लिखते थे। इसी के लिए m.3, m.3, m.3, ③, 3

आदि अन्य प्रतीकों का भी उपयोग हुआ है। आजकल 'ऋण 3' को दर्शाने का सबसे प्रचलित तरीका -3 है। बहरहाल हम इसे जैसे भी लिखें, यह स्पष्ट है कि इसे +3 से अलग दिखाने के लिए किसी न किसी विशेष चिह्न की जरूरत है। बच्चों को यह बात समझने में हम उनकी मदद कैसे करें? ऋणात्मक संख्याओं से उनकी जान-पहचान कैसे कराएं? इस इकाई में हम इसी से सम्बंधित कुछ गतिविधियों पर गौर करेंगे।

भाग 9.2 में हम बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं से परिचित करने के कुछ तरीकों पर विचार करेंगे। भाग 9.3 में हम कुछ ऐसे तरीकों की चर्चा करेंगे जिनके इस्तेमाल से सचिन्ह संख्याओं के जोड़ व बाकी के नियम बच्चे समझ सकें।

ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग करते वक़्त बच्चों द्वारा की जाने वाली आम ग़लतियों तथा उनको आने वाली दिक्कतों की चर्चा पूरी इकाई में जगह-जगह पर की गई है। इन दिक्कतों को हल करने के लिए कुछ सुझाव भी आप पाएंगे। हमें उम्मीद है कि आप स्वयं भी इस मक़सद के लिए कई तरीके विकसित कर पाएंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं का अर्थ समझाने के लिए,
- बच्चों को सचिन्ह संख्याओं के जोड़-बाकी सिखाने के लिए,
- अपनी शिक्षण विधियों का मूल्यांकन करने के लिए

कारगर तरीके विकसित कर पाएंगे।

9.2 ऋणात्मक संख्या क्या है?

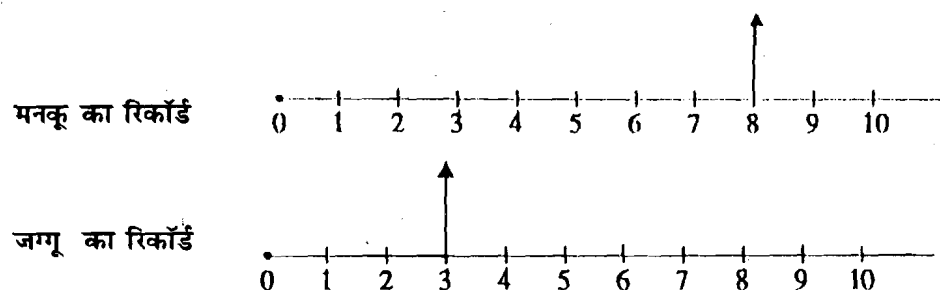
मेरी एक शिक्षक मित्र को बच्चों को 'ऋणात्मक संख्या' सिखाने में बहुत दिक्कत होती है। वह कहती है, "धनात्मक संख्याएं सिखाने के लिए तो हम ठोस वस्तुओं का इस्तेमाल कर सकते हैं। बच्चों को अलग-अलग आकार के समूह दिए जा सकते हैं, जिन्हें वे देख सकते हैं, गिन सकते हैं। लेकिन ऋणात्मक संख्याएं बच्चों को कैसे प्रस्तुत करें?"

आम पाठ्यपुस्तक ऋणात्मक संख्या से बच्चों का परिचय कुछ भी भूमिका दिए बिना अमूर्त ढंग से कराती है। पूर्ण संख्या प्रणाली में ऋणात्मक संख्याओं को जोड़ने की वजह इनमें यह दी जाती है कि हमें कई बार छोटी संख्या में से बड़ी संख्या में मसलन 6 में से 10 को घटाना पड़ता है। इसके बाद ऋणात्मक संख्याओं को धनात्मक संख्या से के योज्य विलोम के रूप में परिभाषित कर दिया जाता है। मसलन, पाठ्यपुस्तक में लिखा होता है कि (-3) वह संख्या है जिसे 3 में जोड़ने पर शून्य आता है। स्वाभाविक है कि बच्चों को यह परिचय घोर अमूर्त लगता है, और वे इस अवधारणा को समझ ही नहीं पाते।

आगे चलकर स्थिति में तब थोड़ा सुधार जरूर आता है जब पाठ्य पुस्तक में ऋणात्मक संख्याओं की चित्रात्मक प्रस्तुति संख्या-रेखा पर की जाती है। बच्चों को यह थोड़ा कम अमूर्त लगता है। इसलिए उनके लिए इसे समझना थोड़ा आसान होता है। और फिर हमेशा के लिए ऋणात्मक संख्या उनके लिए सिर्फ संख्या-रेखा पर एक बिन्दु बनकर रह जाती है। वे यह नहीं सोच पाते कि इसका अर्थ क्या है।

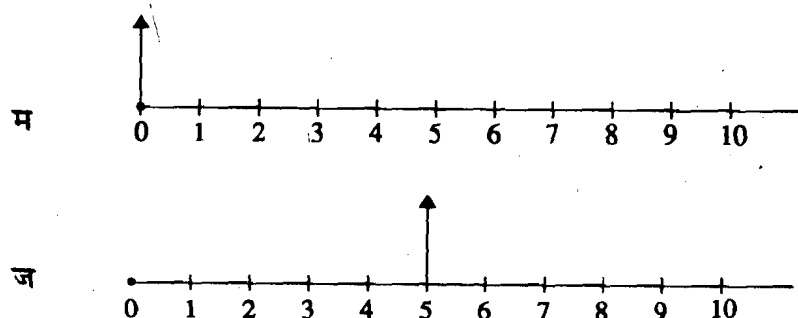
तो हम बच्चों को यह समझने में मदद कैसे करें कि ऋणात्मक संख्या क्या होती है? एक तरीका यह हो सकता है कि बच्चों का सम्पर्क ऐसी स्थितियों से कराया जाए, जहां ऋणात्मक संख्याओं के उपयोग की जरूरत पड़ती हो। मसलन आप उन्हें जमा व नामे (या लाभ वा हानि) से सम्बंधित कहानियां सुना सकते हैं। 'खुशी खुशी' (कक्षा 5) की एक कहानी बतौर उदाहरण प्रस्तुत है

यह सतबीर नाम के एक ऐसे दुकानदार की कहानी है जो उधार में सामान देता था। सतबीर कई बार यह भूल ही जाता था कि किसने क्या खरीदा था और कितने में खरीदा था। उसने याद रखने का एक तरीका निकाला। वह हर ग्राहक के खाते के पन्ने पर एक लाइन बना देता था। जब भी कोई ग्राहक कोई चीज़ खरीदता तो सतबीर उसकी लाइन पर एक निशान लगा देता। इस निशान से उसे पता चल जाता कि उस ग्राहक पर कितना पैसा उधार है। उदाहरण के लिए, मनकू ने 8 रुपए की चीज़ उधार में ली और जग्गू ने 3 रुपए की चीज़ उधार ली। तो मनकू और जग्गू के रिकॉर्ड चित्र 1 में जैसे थे



चित्र 1

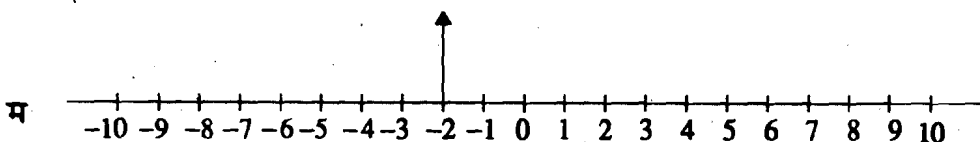
कुछ दिनों बाद मनकू ने अपनी उधारी चुका दी और जग्गू ने 2 रुपए की चीज़ और उधार ले ली। सतबीर ने उनकी लाइनों में तदनुसार परिवर्तन कर दिए। अब ये लाइनें चित्र 2 के जैसी दिखने लगीं।



चित्र 2

अगले दिन मनकू ने 3 रुपए की चीज़ खरीदी और सतबीर को पांच रुपए का नोट दिया। सतबीर के पास छुट्टे पैसे नहीं थे। तो मनकू ने कहा, “कोई बात नहीं, बाकी के पैसे मैं कल ले लूंगा।” अब सतबीर उलझन में पड़ गया। इस बात को रिकॉर्ड में कैसे दिखाएँ?

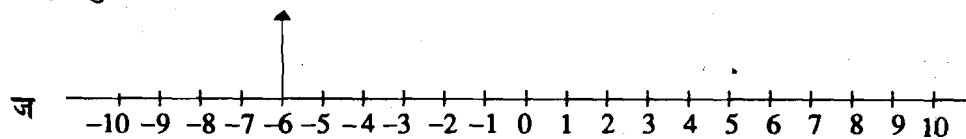
उसने सोचा, “जब मुझे पैसा लेना होता है, तो मैं शून्य के दाईं ओर निशान लगाता हूँ। अब मुझे पैसा देना है, तो निशान कहाँ लगाऊँ?” थोड़ी देर गहराई से सोचकर उसने जग्गू की लाइन को आगे बढ़ाया और उस पर निशान लगा दिया। (यहाँ आप लाइन को शून्य के बाईं ओर बढ़ाकर बच्चों से पूछ सकते हैं कि उनके ख्याल से सतबीर ने निशान कहाँ लगाया होगा। थोड़ी देर रुकने के बाद आप कहानी फिर आगे बढ़ा सकते हैं।) उसने फैसला किया कि जो रुपया उसे वापिस करना है उसे दिखाने के लिए वह शून्य से दो कदम बाईं ओर निशान लगाएगा (देखें चित्र 3)।



चित्र 3

अब वह मनकू और जग्गू के हिसाब के बारे में यह भी कह सकता था कि उसे मनकू से (-2) रुपए लेने हैं और जग्गू से +5 रुपए लेने हैं। ध्यान दें कि उसने यह याद रखने के लिए कि पैसा लेना है या देना है, रकम के पहल एक चिन्ह लगाया।

यह कहानी सुनाने के बाद आप उन्हें इस तरह के सवाल दे सकते हैं: यदि जग्गू का निशान नीचे दिखाए अनुसार हो,



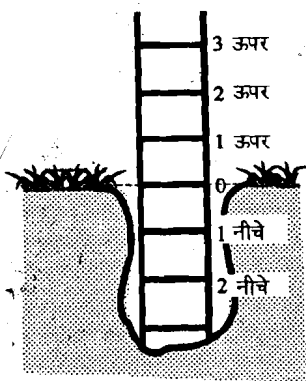
और वह 3 रुपए की चीज़ खरीदे, तो तीर का निशान कहां लगेगा? अब वह सतबीर को पैसे देगा या उससे पैसे लेगा?

E1) बच्चों को ऋणात्मक संख्या समझाने के लिए एक और कहानी बनाइए।

ऊपर जैसी कहानियों के माध्यम से बच्चों का परिचय ऋणात्मक संख्याओं का संख्या-रेखा पर निरूपण से भी हो जाता है।

ऐसे कई और संदर्भ हैं जिनमें हम बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं से परिचित करा सकते हैं। इन संदर्भों के इस्तेमाल से बच्चे इन संख्याओं को बढ़ते व घटते क्रम में रखना भी सीख सकते हैं। आइए देखें कि इस सम्बंध में सुश्री इंदरजीत कौर क्या कहती हैं।

उदाहरण 1 : इंदरजीत ने माध्यमिक स्कूल के गणित व विज्ञान शिक्षकों के विभिन्न समूहों के साथ काम किया है। उनके साथ उसने बच्चों को ऋणात्मक संख्याएं व ऐसी संख्याओं के गुण सिखाने के कुछ तरीकों को आजमाने की कोशिश की। जब उससे इस विषय पर अपने विचार व्यक्त करने को कहा गया, तो उसने बताया, “जब मैं कोई अवधारणा पढ़ाती हूँ तो मेरी कोशिश होती है कि इसे बच्चों की जानी-पहचानी चीज़ों व स्थितियों से जोड़ूं। मसलन उनके रोजमर्रा के जीवन में ऐसी कई स्थितियां होती हैं, जिन्हें मैं ऋणात्मक संख्याओं से जोड़ सकती हूँ—सीढ़ियां चढ़ना, लाभ-हानि, अतीत और भविष्य, तापमान नापना, और यहां तक कि परीक्षा के उत्तरों का मूल्यांकन, वगैरह।”



चित्र 4

जब हमने उससे पूछा कि वह सीढ़ियां चढ़ने को ऋणात्मक संख्याओं से कैसे जोड़ती है, तो उसने कहा, “मैं उन्हें सचिन्ह संख्याओं की बात दो विपरीत दिशाओं में गति के रूप में समझाती हूँ—चढ़ना व उतरना। इसके लिए मैं गड्ढे में खड़ी किसी सीढ़ी का उदाहरण लेती हूँ। धरती का स्तर शून्य है, सीढ़ी की एक पायदान चढ़ना मतलब ‘1 ऊपर’, दो पायदान यानी ‘2 ऊपर’, वगैरह, हैं (देखें चित्र 4)। इसी प्रकार से धरती से एक पायदान नीचे (गड्ढे में) ‘1 नीचे’ है, 2 पायदान नीचे ‘2 नीचे’, वगैरह, होगा। इसके बाद मैं उन्हें इस तरह के सवाल देती हूँ कि ‘यदि तुम 2 पायदान ऊपर जाओ और फिर 5 पायदान और ऊपर जाओ तो किस स्थिति में आ जाओगे?’, ‘यदि तुम 5 पायदान ऊपर जाओ और फिर 5 पायदान नीचे आओ, तो तुम्हारी स्थिति क्या होगी?’ और ‘यदि तुम 3 पायदान नीचे जाओ तो तुम्हारी स्थिति क्या होगी?’ जब बच्चों को ऊपर-नीचे का काफ़ी अभ्यास हो जाता है, तो मैं बस ‘ऊपर’ शब्द को छोड़ देती हूँ और ‘नीचे’ की जगह ‘-’ चिन्ह इस्तेमाल करने लगती हूँ। मैं यह स्पष्ट कर देती हूँ कि ‘नीचे’ वाली संख्याओं के साथ ‘-’ चिन्ह लगाना ज़रूरी है ताकि उन्हें ‘ऊपर’ वाली संख्याओं से अलग पहचाना जा सके।

सीढ़ी के इस मॉडल के ज़रिए बच्चे यह भी समझ जाते हैं कि -15, -5 के मुकाबले शून्य से ज़्यादा दूर है। वे यह भी समझ जाते हैं कि -5 से 3 तक पहुंचने के लिए 8 पायदान ऊपर चढ़ना होता है। यह ज़रूर है कि मैं उन्हें कई सवाल देती हूँ ताकि वे धीरे-धीरे ऋणात्मक संख्याओं के ये गुण समझ जाएं और धनात्मक संख्याओं के साथ इनका सम्बंध भी देख पाएं।

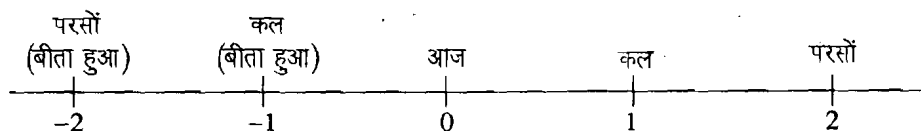
बच्चों के लिए यह समझाना आसान नहीं होता कि, मसलन, -8, शून्य से -7 की तुलना में ज़्यादा दूर है। यदि आप छठी कक्षा की किसी बच्ची से पूछें कि -8 और -2 में से बड़ी कौन सी है तो वह -8 बताएगी। धनात्मक संख्याओं से उसकी जान-पहचान के मददे नज़र यह जवाब स्वाभाविक

है। लिहाजा, हमें ऐसे तरीके खोजने होंगे जिनसे बच्चे यह समझ जाएँ कि -2 , -8 से बड़ी संख्या है। सीढ़ी इसमें सचमुच मददगार है।"

हमने इन्दरजीत से पूछा कि वह आड़ी संख्या-रेखा वाला तरीका इस्तेमाल क्यों नहीं करती। उसने बताया, "दाएं-बाएं के मुकाबले ऊपर-नीचे वाला प्रस्तुतीकरण बच्चों के लिए समझना ज्यादा आसान होता है। इसका कारण यह हो सकता है कि दाएं-बाएं वाला मॉडल समझाते वक़्त बच्चे धनात्मक व ऋणात्मक दिशाओं को लेकर चक्कर में पड़ जाते हैं क्योंकि मेरा बाईं ओर जरूरी नहीं कि उनके लिए भी बाईं ओर हो। यह इस बात पर निर्भर है कि वे रेखा को किस तरफ़ से देख रहे हैं। लेकिन जब बच्चे खड़ी पट्टी के आदी हो जाते हैं, तो मैं इसे घुमाकर ऐसे रख देती हूँ कि वह सामान्य संख्या-रेखा जैसी हो जाती है। तब हम इस संख्या-रेखा पर ऋणात्मक संख्याएँ पहचानने का अभ्यास करते हैं ताकि बच्चे इसके साथ सहज हो जाएँ। मैं कक्षा में या कक्षा के बाहर इस अवधारणा को पुष्ट करने के हर मौके का लाभ उठाती हूँ।"

किसी अवधारणा में बच्चे की समझ को पुष्ट करने के लिए हमें कई क्षेत्रों में इसके इस्तेमाल का सहारा लेना चाहिए।

इसके बाद इन्दरजीत ने अतीत और भविष्य के इस्तेमाल की बात समझाई। उसने हमें बताया, "इस तरीके में मैं 'आज' को समय-रेखा पर '0' से दर्शाती हूँ (देखें चित्र 5), आने वाले कल को '1' से, आने वाले 'परसों' को '2' से दर्शाती हूँ। फिर मैं उनसे पूछती हूँ कि 'बीते कल' को कैसे दर्शाएं। थोड़े संकेत व चर्चा के बाद ज्यादातर सभी राजी हो जाते हैं कि इसे 0 से एक चिन्ह पहले से दर्शाया जाए। लेकिन, फिर मैं उनसे पूछती हूँ कि वे 0 के दाईं ओर वाले तथा बाईं ओर वाले 1 के बीच फ़र्क कैसे बताएंगे। क्या आने वाले कल और बीते कल के बीच अन्तर दिखाने के लिए कोई निशान जरूरी नहीं है? वे थोड़ा सोचने के बाद आमतौर पर इस बात से सहमत हो जाते हैं। इस जगह पर मैं -1 का सुझाव देती हूँ। फिर हम इसे आगे बढ़ाकर परसों के लिए -2 , का इस्तेमाल करते हैं, वगैरह। इस तरह से वे आज को शून्य, अतीत को ऋणात्मक संख्याओं तथा भविष्य को धनात्मक संख्याओं के रूप में देखने लगते हैं।"



चित्र 5 : एक समय-रेखा

इससे पहले इन्दरजीत ने ऋणात्मक संख्याओं के व्यावहारिक उपयोग के एक और उदाहरण का जिक्र किया था, जो बच्चों को दिलचस्प लगता है। वह उदाहरण है कई विकल्पों में से चुनने वाले सवालों के संदर्भ में। जब हमने उनसे इसके बारे में पूछा तो उन्होंने बताया, "जो लोग ऐसे टेस्ट में बैठते हैं वे कई बार किसी सवाल का जवाब नहीं जानते, मगर अन्दाज़ा लगाने की कोशिश करते हैं। इस तरह की अटकलों से निपटने के लिए, हर ग़लत उत्तर पर ऋणात्मक अंक दिए जाते हैं, यानी कुछ अंक काटे जाते हैं। मसलन, एक तरीका यह है कि —

हर सही उत्तर के लिए 2 अंक,

सवाल छोड़ने पर 0 अंक,

हर ग़लत उत्तर के लिए -1 अंक।

मैं बच्चों को यह पृष्ठभूमि समझा देती हूँ। फिर मैं कोई एक उदाहरण लेकर उसमें अंकों का उतार-चढ़ाव बताती हूँ। मसलन, मैं उन्हें 10 सवालों वाले इस तरह के टेस्ट में किसी बच्चे का प्रदर्शन दिखाती हूँ।

- | | | | |
|--------------------|------|------|-------|
| 1. ✓ | 4. ✓ | 7. ✓ | 10. ✓ |
| 2. x | 5. ✓ | 8. x | |
| 3. उत्तर नहीं लिखा | 6. x | 9. ✓ | |

फिर मैं उन्हें बताती हूँ कि ये अंक एक संख्या-रेखा पर किस तरह दिखाए जा सकते हैं। मैं उनसे रेखा के 0 के बिन्दु से शुरू करने को कहती हूँ। फिर हर सही उत्तर के लिए अंक दाहिनी ओर दो निशान बढ़ते हैं, ग़लत उत्तर पर एक कदम बाईं ओर चलते हैं, और यदि किसी सवाल का उत्तर न दिया हो, तो न दाईं ओर बढ़ेंगे न बाईं ओर। तो, चूंकि बच्चे ने पहला सवाल सही किया है इसलिए हम दो निशान दाईं ओर चलते हैं। दूसरा उत्तर ग़लत है, इसलिए हम एक कदम बाईं ओर चलेंगे, यानी 1 पर पहुंच जाएंगे। तीसरे सवाल में उसे शून्य अंक मिला, इसलिए अंक में कोई बदलाव नहीं होगा। इसके बाद मैं आगे का काम उन पर छोड़ देती हूँ। साथ में उनसे यह कह देती हूँ कि वे हर चरण पर यह साफ़-साफ़ लिखें कि चौथे सवाल, पांचवे सवाल, आदि के बाद बच्चे के अंक कितने थे। मैं उनसे यह भी कहती हूँ कि हर सवाल के बाद बच्चे के अंकों की स्थिति को रेखा पर निशान लगाकर बताते जाएं। उन्होंने मुझे यह बताना होता है कि आखिर में बच्चे के अंक रेखा के किस बिन्दु पर पहुंचे।"

—————X—————

इन्दरजीत के साथ इस चर्चा से हमें यह सोचने में मदद मिली कि बच्चों को ऋणात्मक संख्या समझने में मदद किन किन तरीकों से दी जा सकती है। उसने जितनी भी विधियां सुझाईं उनमें बच्चों को ऐसी संख्याओं से परिचित कराने के लिए बढ़ाई गई संख्या-रेखा का सहारा लिया गया था। क्या इसी मक़सद के लिए अन्य तरीके भी अपनाए जा सकते हैं? आप अगला अभ्यास करते हुए इसके बारे में सोच सकते हैं।

E2) ऊपर दिए गए चर्चा के मद्दे नज़र आप बच्चों को किसी संदर्भ में ऋणात्मक संख्याओं से कैसे परिचित कराएंगे? (ऊपर प्रस्तुत संदर्भों के अलावा कोई अन्य उदाहरण दें।)

उदाहरण 1 में बच्चों के सामने ऋणात्मक संख्याएं व उनके गुण प्रस्तुत करने के लिए इन्दरजीत ने किसी ठोस चीज़ का सहारा नहीं लिया। जैसा कि आप जानते हैं बच्चे तब सबसे बेहतर सीखते हैं जब ठोस चीज़ों के साथ गतिविधियां की जाएं। क्या आप ऐसी कोई गतिविधियां या खेल सोच सकते हैं? यहां कुछ उदाहरण दिए जा रहे हैं।

• सोडा बोतलों के 10 एक जैसे ढक्कन ले लीजिए। इन ढक्कनों को सीधा ()

या उल्टा () रखा जा सकता है। हम पहली स्थिति में रखे ढक्कनों को +1

की कीमत दे देते हैं और दूसरी स्थिति में रखे ढक्कनों को -1 की कीमत दे देते हैं। अब खेल यह है कि हर खिलाड़ी इन ढक्कनों को अच्छे से हिलाकर फेंके। जब ये ढक्कन ज़मीन

बच्चों को यह समझाना कि किसी भी संख्या n के लिए, $n + (-n) = 0$.

पर गिर जाएं, तो वह ( ) जैसी सारी जोड़ियों (यानी +1 व -1) को

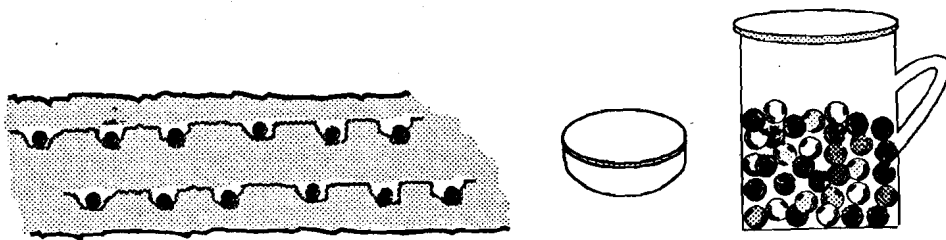
अलग कर दे। अब यह शेष ढक्कनों को गिन ले। जैसे, यदि 4 जोड़ियां बन गईं और 2 ढक्कन सीधे पड़े हैं तो उसे +2 अंक मिलेंगे। यदि तीन जोड़ियां बनती हैं और 4 ढक्कन उल्टे पड़े हैं तो उसे -4 अंक मिलेंगे। जिस खिलाड़ी को सबसे पहले दस अंक मिल जाएंगे, वह जीतेगी।

यह खेल कुछ बच्चे खेल सकते हैं, या इसे साप्ताहिक खेल में भी बदला जा सकता है।

इस खेल का सबसे उपयोगी पहलू यह है कि सीधे और उल्टे पड़े ढक्कन बच्चों के सामने धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं का सांकेतिक लेकिन ठोस प्रस्तुतीकरण हैं। इस खेल से यह बात भी पुख्ता हो जाती है कि -5 वह संख्या है जो +5 को रद्द कर देती है।

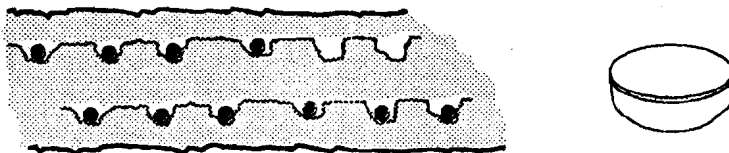
• अगले खेल के लिए हर बच्ची ज़मीन में 12 छोटे गड्ढे बना लेती है, 6-6 गड्ढों की दो कतारों में। साथ में हर बच्ची के पास एक कटोरा होता है। शुरू में हर बच्ची की स्थिति

चित्र 6 जैसी होती है। हर गड्ढे में एक कंचा है और एक खाली कटोरा है। यह शून्य स्थिति है। साथ ही एक कंचों का भण्डार भी है, जिसमें से सारे बच्चे कंचे ले सकते हैं।



चित्र 6

अब एक बच्ची, मान लीजिए मंजू, पांसा फेंकती है और उस पर जो अंक आए, उतने कंचे वह भण्डार में से लेकर अपने कटोरे में रख लेती है। मसलन, पांसे पर 3 अंक आए, तो उसके पास 12 गड्ढों में 12 कंचे हैं और 3 कंचे कटोरे में हैं। इस तरह से हर खिलाड़ी एक बार पांसा फेंके और भण्डार में से कंचे लेकर अपने कटोरे में रख ले। सबकी एक बारी पूरी हो जाने पर मंजू को फिर से पांसा फेंकने का मौका मिलता है। यह 'वापसी' फेंक है। जो भी अंक आया उसे उतने कंचे वापिस भण्डार में डालने होंगे। यदि 2 अंक आता है, तो वह अपने कटोरे के 3 कंचों में से 2 वापिस भण्डार में डाल देगी। लेकिन यदि 5 आ गया तो वह क्या करे? 5 कंचे लौटाने के लिए उसे कटोरे के 3 कंचों के अलावा अपने गड्ढों में से भी 2 कंचे निकालने होंगे (चित्र 7 देखें)।



चित्र 7 : - 2 का एक ठोस प्रस्तुतीकरण

यानी अब वह शून्य स्थिति की तुलना में 2 कंचे कम पर है। अर्थात् शून्य स्थिति पर पहुंचने के लिए उसे 2 कंचे और चाहिए। यानी उसके पास -2 कंचे हैं। अन्य बच्चे भी इस चक्र को इसी तरह खेलेंगे। तीसरा चक्र फिर से 'भण्डार से लेने' का चक्र होगा। इस तरह खेल चलता रहेगा।

यह जरूरी है कि खेल के दौरान बच्चे यह समझते जाएं कि उन्हें कितने अंक मिले हैं और क्यों। मसलन, मंजू कह सकती है, "मुझे 5 कंचे देने हैं। तो मैं ये (कटोरे वाले) दे देती हूँ और 2 गड्ढों में से दे देती हूँ। अब मुझे गड्ढे भरने के लिए 2 कंचे चाहिए।" इससे बच्चों को सम्बंधित अवधारणा समझने में भी मदद मिलेगी और उससे जुड़ी भाषा से भी वे परिचित होते जाएंगे। यह खेल समूहों में भी खेला जा सकता है।

एक अन्य खेल 51 कार्डों के सेट से खेला जाता है। इन कार्डों पर -25 से +25 तक अंक लिखे जाते हैं। एक गड्ढी से चार बच्चे खेल सकते हैं। एक बच्ची कार्डों को अच्छे से फेंटकर हर खिलाड़ी को 10-10 कार्ड दे दे। बाकी के कार्ड बीच में रख दिए जाएंगे। अंक नीचे की ओर रहें। जीतने के लिए किसी भी बच्ची को 3 या 3 से अधिक कार्डों का क्रम (जैसे, -22, -21, -20 या -1, 0, 1, 2 या 3, 4, 5) बनाना होगा। उसके हाथ में सारे कार्डों से ऐसी शृंखलाएं बन जानी चाहिए। हर बारी, रमी-की तरह, बच्ची ढेर में से एक कार्ड ले और एक कार्ड फेंके। फेंके गए कार्ड का अंक ऊपर की ओर रहे।

और अब क्यों न आप कुछ अभ्यास कर डालें?

E4) बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं का अभ्यास कराने के लिए आप पांसे के और कौन से खेल सोच सकते हैं?

हमने बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं से परिचित कराने के कुछ तरीकों पर विचार किया है। ऐसी संख्याओं से परिचित होने के बाद भी उनकी समस्याओं का अन्त नहीं होता। जब उन्हें सचिन्ह संख्याओं, यानी ऋणात्मक व धनात्मक दोनों तरह की संख्याओं पर गणितीय संक्रियाएं लागू करनी होती हैं, तो उन्हें फिर दिक्कतों का सामना करना पड़ता है। आइए, देखें कि यहां उनकी मदद कैसे की जा सकती है।

9.3 सचिन्ह संख्याओं पर संक्रियाएं

कक्षा 8 के एक बच्चे को जब $(-2) - (-5)$ हल करने को कहा गया, तो उसने लिखा -3 । जब उससे पूछा गया कि उसने यह उत्तर कैसे निकाला, तो उसने बताया, "तीन ऋण हैं, ऋण ऋण धन होता है, तो एक ऋण बच गया। फिर $5-2$ बराबर 3 होता है। तो उत्तर -3 आया।"

पूर्णांकों का समूह धनात्मक व ऋणात्मक संख्याएं तथा शून्य से बनता है।

अफसोस की बात यह है कि ऐसी गलतियां बहुत आम हैं। वास्तव में इसमें कोई हैरानी की बात नहीं है क्योंकि आमतौर पर हम बच्चों को गणितीय संक्रियाओं को लागू करने की विधि तो बताते हैं मगर यह नहीं समझाते कि ये विधियां काम कैसे करती हैं। यहां हम कुछ ऐसे तरीकों पर विचार करेंगे जिनसे स्थिति को बेहतर बनाने में मदद मिल सकती है। सबसे पहले हम यह देखेंगे कि पूर्णांकों (integers) का जोड़ करने की विधि बच्चों को कैसे समझाई जाए।

9.3.1 जोड़ना

पूर्ण संख्याओं (whole numbers) का कोई भी जोड़ ठोस चीजों के आधार पर स्वाभाविक तरीके से किया जा सकता है। लेकिन ऋणात्मक संख्याओं को जोड़ते वक्त ऐसा कोई स्वाभाविक संदर्भ उपलब्ध नहीं होता। जैसा कि आपने भाग 9.2 में पढ़ा, यह कारण है कि बच्चे ऋणात्मक संख्याओं को नहीं समझ पाते। क्या वहां हमने सुधार के जो सुझाव दिए थे, वे यहां भी कारगर हो सकते हैं? क्या हम वहां सुझाई गई गतिविधियों में फेरबदल करके उनका इस्तेमाल पूर्णांकों का जोड़ समझाने में कर सकते हैं? निम्नलिखित उदाहरण शायद इस संदर्भ में मददगार साबित हो।

उदाहरण 2 : 12 वर्षीय कुट्टी को ऋणात्मक संख्याएं भारी पड़ रही थीं। उसकी मां ने इस मामले में कुछ शिक्षक प्रशिक्षकों से सम्पर्क किया। उनमें से एक ने बोतल के ढक्कन वाली गतिविधि सुझाई। मां ने जब कुट्टी के साथ इसे आजमाया तो वह उपयोगी लगी। कम से कम उसे इतना तो समझ आ गया कि $+1$ और -1 एक-दूसरे को रद्द कर देते हैं। मां ने इस बात को इस तरह लिखकर दिखाया $(+1) + (-1) = 0$ । उसने यह बात मान भी ली। तो जब मां ने उससे पूछा कि $(+2) + (-2)$ कितना होगा, उसने बोतल के ढक्कनों का उपयोग करके उत्तर निकाल लिया, शून्य। $(+3) + (-3) = ? 0$ । इस प्रकार से वह धीरे-धीरे समझ गया कि

किसी भी धनात्मक संख्या n के लिए $(+n) + (-n) = 0$ होता है।

इसी तरह से मां ने उसे यह भी समझने में मदद की कि $(-n) + (+n) = 0$ होता है।

अब उन्होंने $(-3) + (-2)$ जैसे सवाल पर जाने का फैसला किया। वह इसे नहीं कर पाया। उन्होंने उससे कहा कि ढक्कनों से -3 दर्शाए। उसने दर्शा दिया।

"अब दूसरे ढक्कनों से -2 दिखाओ", मां ने कहा। उसने कर दिया।

"शबाश! अब इनको मिला दो। कितना आया?" उसने उन्हें मिला दिया और कहा कि 5 आए।

"पक्की बात है? जरा देख लो ढक्कनों के मुँह किस तरफ हैं," मां ने उसे याद दिलाया।

“ओह, हाँ, -5,” अपनी गलती पहचानते हुए कुट्टी बोला।

फिर मां ने उससे कहा कि उसने जो कुछ किया है उसे गणितीय प्रतीकों में लिख ले। थोड़ी मदद के बाद उसने लिख लिया : $(-3) + (-2) = -5$.

उन्होंने इसी तरह के कुछ और उदाहरण किए। वे उससे साथ-साथ हल लिखने को कहती गईं। फिर धीरे-धीरे एक सूची सी बन गई:

$$(-3) + (-2) = -5$$

$$(-1) + (-3) = -4$$

$$(-2) + (-3) = -5$$

: : :

: : :

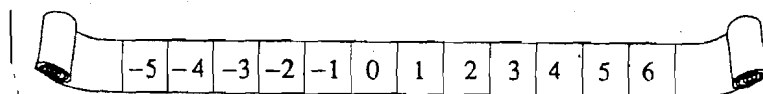
इस सूची को देखकर, और थोड़ी मदद के बाद, वह एक पैटर्न पहचानने लगा। इस पैटर्न के आधार पर वह ऋणात्मक संख्याओं के जोड़ के नियम तक पहुंच गया — “पहले मैं सिर्फ संख्याओं को जोड़ लेता हूँ और फिर जोड़ के पहले ऋण चिन्ह लगा देता हूँ।” मां ने उससे कहा कि वह अपनी बात एक उदाहरण से समझाए। तो कुट्टी ने उन्हें बताया कि $(-10) + (-5)$ का उत्तर निकालने के लिए वह पहले 10 और 5 को जोड़कर 15 प्राप्त कर लेगा और फिर इसके सामने ऋण चिन्ह लगाएगा तो उत्तर -15 मिल जाएगा।

इस तरह से वह खुद ही उस नियम तक पहुंच गया जिसे बीजगणित में हम यों लिखते हैं:

$(-m) + (-n) = -(m+n)$, जहाँ m व n धनात्मक संख्याएँ हैं।

थोड़े दिन बाद मां ने कुट्टी के साथ इस गतिविधि को दोहराया। और फिर उससे कहा कि ढक्कन का उपयोग किए बगैर ऋणात्मक संख्याओं का जोड़ करे। उसने कर दिया।

अब मां ने संख्या-रेखा के इस्तेमाल का फैसला किया। इस उपकरण का उपयोग कुट्टी के शिक्षक ने ऋणात्मक संख्याएँ समझाने के लिए किया था। मां ने इसे एक ऐसी संख्या-पट्टी का रूप दे दिया जिस पर -50 से +50 तक के पूर्णांक लिखे थे (देखें चित्र 8)। कुट्टी धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं को बोटल के ढक्कनों से दर्शाने में दक्ष हो ही चुका था। अतः उन्होंने इसे पट्टी पर अंकित संख्याओं से जोड़ने की कोशिश की।



चित्र 8 : संख्या-पट्टी

इसके लिए उन्होंने कुट्टी को एक बटन दे दिया और उसे समझाया कि जब वे तीन ढक्कन के मुंह नीचे करके रखें, यानी संख्या +3 हो, तो वह बटन को पट्टी के 3 पर, यानी 0 से तीन स्थान दाईं ओर रखे। और फिर यदि उसे 4 और ऐसे ढक्कन दे दिए जाएं, तो उसके पास कुल कितने हो जाएंगे? “तब तुम बटन को कहां रखोगे?” उसने कहा, “7 पर”। “यानी तुम चार स्थान और दाईं ओर जाओगे, है न?”

इसी प्रकार से $(-2) + (-3)$ का हल पाने के लिए उसे उन्होंने यह समझाने में मदद दी कि (-2) से तीन स्थान बाईं ओर चलना होगा, यानी -5 पर जाना होगा। इस प्रकार के कुछ और उदाहरणों की मदद से उन्होंने उसका ध्यान इस बात पर दिलाया कि जब वह धनात्मक संख्याएँ जोड़ता है तो दाईं ओर बढ़ता है तथा ऋणात्मक संख्याएँ जोड़ते वक्त बाईं ओर बढ़ना होता है।

“अब ज़रा पट्टी का उपयोग करके बताओ कि $2 + (-2)$ कितना होगा?” मां ने पूछा। उसे पता था कि पहले 2 का मतलब यह है कि उसे बटन को शून्य से दो स्थान दाईं ओर ले जाना पड़ेगा। यह तो उसने कर लिया। मगर फिर थोड़ा ठिठक गया। मां ने कहा, “अच्छा, पट्टी के बगैर बताओ कि $2 + (-2)$ कितना होगा।” उसने बेहिचक जवाब दिया ‘शून्य’। “शाबाश! तो तुम इस वक्त जहां हो, वहां से शून्य पर पहुंचने के लिए क्या करना होगा?” “दो कदम पीछे चलना पड़ेगा,” उसने कहा। इस पर मां ने कहा, “सही। -2 का यही तो मतलब होता है। -2 के लिए तुम्हें 2 स्थान बाईं ओर चलना पड़ता है, याद है?” इस तरह से धीरे-धीरे वे उसे यह समझने में मदद कर पाई कि, मसलन, $2 + (-3) = -1$ होता है, वगैरह।

कुट्टी की मां कई दिनों तक यह गतिविधि बीच-बीच में तब एक दोहराती रहीं जब तक कि उन्हें यकीन न हो गया कि वह सचिन्ह संख्याओं को जोड़ना सीख चुका है।

—X—

और अब आपके लिए कुछ अभ्यास।

E5) किसी धनात्मक व किसी ऋणात्मक संख्या का जोड़ सीखने में बच्चों की मदद करने की दृष्टि से माचिस का ढक्कन व अन्दर की डिबिया का इस्तेमाल करते हुए एक गतिविधि तैयार कीजिए।

E6) एक ऐसा खेल तैयार कीजिए जिसे खेलते हुए बच्चे सचिन्ह संख्याओं को जोड़ने का अभ्यास कर सकें। इस खेल को खेलते हुए वे सचिन्ह संख्याओं के कौन से गुण सीखेंगे? कुछ 11 वर्षीय बच्चों के साथ इस खेल को आजमाइए और देखिए कि क्या इससे आपके शिक्षण उद्देश्य की प्राप्ति होती है।

आइए अब देखते हैं कि एक सम्बंधित संक्रिया सीखने में बच्चों की मदद कैसे की जा सकती है।

9.3.2 घटाना

बच्चों द्वारा की जाने वाली आम गलतियों को इकट्ठा करने के लिए आयोजित एक कार्यशाला में मैंने एक शिक्षक की बात सुनी। ऋणात्मक संख्याओं को घटाते वक्त, उन्होंने देखा कि बच्चे निम्नलिखित क्रिस्म की गलतियां आम करते हैं:

$$19 - (-11) = 8,$$

$$19 - (-11) = -8,$$

$$-19 - 11 = 30,$$

$$-11 - (-19) = -8$$

बच्चे ऐसी गलतियां क्यों करते हैं? मसलन, पहली क्रिस्म की गलती के बारे में हम कह सकते हैं कि इसकी वजह है कि बच्ची ने ऋणात्मक संख्या के सामने लगे चिन्ह को अनदेखा कर दिया। लेकिन सबसे बड़ी वजह है कि बच्ची ने सचिन्ह संख्याओं को घटाने की प्रक्रिया ही नहीं समझी है। इसी को सुधारने की ज़रूरत है। यह काम कैसे किया जाए?

सबसे पहले देखते हैं कि सचिन्ह संख्याओं को घटाने की प्रक्रिया को सीखने में कौन से चरण शामिल हैं। ये हैं

(i) प्राकृतिक संख्या को घटाना (मसलन, $4 - 10$, $10 - 4$ या $-10 - 4$),

(ii) $-(-n) = n$, जहाँ n कोई धनात्मक संख्या है (जैसे $-(-5) = 5$),

(iii) ऋणात्मक संख्या को घटाना (जैसे $5 - (-6)$ या $-5 - (-6)$).

बच्चों को इनमें से हर चरण समझाने के लिए कौन सी गतिविधियाँ बनाई जा सकती हैं? पहला चरण समझने में तो उन्हें संख्या-रेखा से मदद मिल सकती है। वे संख्या-रेखा से काफी परिचित हो ही चुके होंगे। यदि वे यह समझ सकें कि 4 घटाने का मतलब होता है कि हम लाइन पर जहाँ भी हों वहाँ से 4 कदम बाईं ओर चलें, तो वे यह समझ पाएंगे कि पहली किस्म का घटाना कैसे होता है।

अब देखते हैं कि शेष दो चरणों को समझने में उन्हें किस तरह से मदद दी जाए। शायद इस संदर्भ में आपको मैरी का तरीका दिलचस्प लगे।

उदाहरण 3 : मैरी पिछले कुछ वर्षों से माध्यमिक स्कूल में गणित पढ़ाती रही है। इस दौरान उसने बच्चों को 'कठिन' विषय समझाने के लिए कई तरीके आजमाए हैं। ऋणात्मक संख्याएँ सिखाने का उसका तरीका कारगर लगता है क्योंकि इससे पढ़े हुए ज्यादातर बच्चे ऋणात्मक संख्याओं व उनपर संक्रियाओं को लेकर काफी दक्ष हैं।

मैरी का तरीका तक़रीबन वैसा ही है जैसा उदाहरण 2 में कुट्टी की मां ने अपनाया था। वह शुरुआत ठोस चीज़ों से करती है। फिर एक निश्चित मोड़ पर वह बच्चों को संख्याओं से सम्बंधित अवधारणाएँ या प्रक्रियाएँ सीखने में मदद देने के लिए, संख्या-रेखा / पट्टी का इस्तेमाल शुरू करती है। उदाहरण के लिए, बच्चों को यह समझाने के लिए कि $-(-n) = n$ होता है, वह ऊपर-नीचे वाला मॉडल इस्तेमाल करती है (देखें चित्र 4)। मसलन वह उनसे पूछती है कि, 4 ऊपर का उल्टा क्या होगा।

वे जवाब देते हैं, "4 नीचे।"

"और '4 नीचे' का उल्टा?"

"4 ऊपर।"

"तो यदि हम '4 ऊपर' को 4 लिखें और '4 नीचे' को -4 लिखें, तो 4 का उल्टा क्या होगा?"

बच्चे आम तौर पर बता देते हैं, -4.

फिर वह कई धनात्मक संख्याओं का उल्टा पूछती है और बच्चों के उत्तरों को निम्नानुसार कॉलम में लिखती जाती है:

10 का उल्टा -10

3 का उल्टा -3

5 का उल्टा -5, वगैरह।

इस सूची के आधार पर वह बच्चों से किसी संख्या का उल्टा प्राप्त करने का नियम निकालने को कहती है। थोड़ी बातचीत के बाद वे आमतौर पर इस निष्कर्ष पर पहुँच जाते हैं कि किसी संख्या का उल्टा पता लगाने के लिए उसके पहले ऋण चिह्न लगा देते हैं।

अब वह इसी नियम को आगे बढ़ाकर ऋणात्मक संख्याओं पर लागू करती है — "तो -5 का उल्टा क्या होगा?" एक बार फिर कक्षा में थोड़ी चर्चा होती है और बच्चे इस आम सहमति पर पहुँचते हैं कि -5 का उल्टा $-(-5)$ होगा। वह इस बात को ब्लैकबोर्ड पर लिख देती है। फिर वह उन्हें याद दिलाती है, "-5 यानी '5 नीचे' होता है। तो इसका उल्टा कितना होगा?" वे कहते हैं, "5 ऊपर।" फिर वह पूछती है, "हम इसे 5 भी लिखते हैं, है ना?" इस तरह से, कई उदाहरण करने के बाद, वे समझ जाते हैं और मान लेते हैं कि $-(-5) = 5$, $-(-2) = 2$, वगैरह। अब वह

इस बात का इस्तेमाल बच्चों को यह समझने में मदद देने के लिए करती है कि जब हम ऋणात्मक संख्याओं को घटाते हैं, तो क्या होता है। वह बच्चों से पूछती है, "जब $-(-5) = 5$ होता है, तो $7 - (-5)$ कितना होगा?" वह पाती है कि बच्चे अक्सर संबंध को पहचान लेते हैं और उत्तर 12 निकाल लेते हैं। पहले सीखी गई बात, यानी $-(-n) = n$, का इस्तेमाल करके बच्चे $-5 - (-7)$ जैसे सवाल करना भी सीख जाते हैं।

हर चरण पर मैरी बच्चों को खुद से करने के लिए कई उदाहरण और अभ्यास देती है। उसका अनुभव है कि काफ़ी अभ्यास करने के बाद बच्चों को संख्या-रेखा का सहारा नहीं लेना पड़ता। वे घटाने का सामान्य नियम समझ जाते हैं और संक्रिया को आसानी से करने लगते हैं।

—X—

अब निम्नलिखित अभ्यास करते हुए आप कुछ अन्य तरीके सोचिए।

E7) बच्चों को सचिन्ह संख्याओं का घटाना सिखाने के लिए समय-रेखा (चित्र 5) का उपयोग करते हुए एक गतिविधि बनाइए। यह भी बताइए कि आप किन चरणों के ज़रिए नियम तक उनको पहुँचाएंगे?

सचिन्ह संख्याओं को जोड़ना व घटाना सीख जाने के बाद भी बच्चों को गुणा व भाग में दिक्कत आती है। इन संक्रियाओं की बात हम यहां नहीं करेंगे। हम उम्मीद करते हैं कि बच्चों को ये संक्रियाएं सीखने में मदद के लिए आप गतिविधियाँ व अभ्यास बना सकेंगे।

तो अब हम इस इकाई में की गई चर्चा का सारांश देखें।

9.4 सारांश

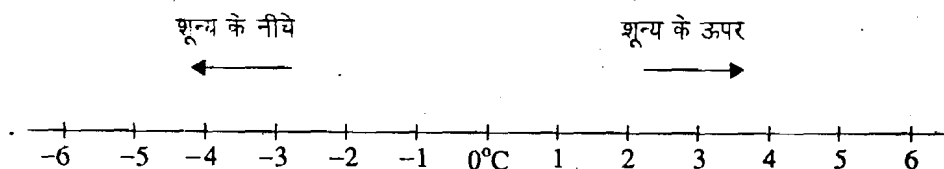
इस इकाई में हमने निम्नलिखित मुद्दों पर चर्चा की:

- 1) कुछ ऐसे कारण जिनकी वजह से बच्चों को यह समझने में कठिनाई होती है कि ऋणात्मक संख्या क्या होती है।
- 2) बच्चों को सचिन्ह संख्याओं का अर्थ व उनके गुण समझाने के कुछ तरीके जो ऐसी संख्याओं को ठोस चीज़ों के रूप में या चित्रों के रूप में प्रदर्शित करने पर आधारित हैं।
- 3) ऐसी कई गतिविधियाँ, जिनकी मदद से बच्चे सचिन्ह संख्याओं को जोड़ना व घटाना सीख जाएं।

9.5 अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

E2) एक और स्थिति जिससे कक्षा 6 के बच्चे परिचित होते हैं, वह है तापमान नापना। विज्ञान की कक्षा में बच्चे सीखते हैं कि बर्फ़ का गलनांक (melting point) 0° से. होता है। टी.वी., रेडियो और अखबारों के माध्यम से कई बच्चे जानते हैं कि बहुत ठण्डे इलाकों में तापमान शून्य से 2° नीचे, यानी -2° हो जाता है। हम उन्हें यह बता सकते हैं कि कैसे जब कोई स्थान ठण्डा होता जाता है, वैसे-वैसे तापमान शून्य से और नीचे होता जाता है। जैसे शून्य से 15° नीचे (यानी -15°) -10° की तुलना में ज़्यादा ठण्डा होता है। इस बात को हम

तापमान-रेखा (चित्र 9 देखें) पर दशां सकत ह। शून्य के बाई ओर वे तापमान हैं जो शून्य से नीचे हैं और दाई ओर के तापमान शून्य से ऊपर हैं। रेखा पर ये बिन्दु बच्चों के साथ चर्चा के बाद और किसी वयस्क के थोड़े से मार्गदर्शन के बाद लिखे जा सकते हैं। इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलती है कि जैसे-जैसे शून्य के नीचे संख्या बड़ी होती जाती है, हम शून्य से उतना ही दूर हटते जाते हैं। जब चर्चा व उदाहरणों के ज़रिए बच्चे यह

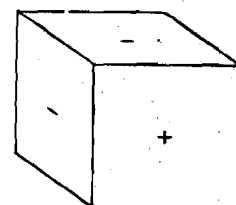


चित्र 9 : तापमान-रेखा

बात समझ जाएं, तो हम उन्हें यह समझने में मदद कर सकते हैं कि जैसे-जैसे हम इस रेखा पर दाई ओर बढ़ते हैं, वैसे-वैसे तापमान बढ़ता है। थोड़े और अभ्यास के बाद हम उनसे पूछ सकते हैं कि वे रेखा को देखकर बताएं कि -15 और -5 में से कौन सा बड़ा है। वे आम तौर पर इसका उत्तर दे पाते हैं।

हां, यह ज़रूर है कि यह गतिविधि एक बार करके छोड़ देने से काम नहीं चलेगा। ज़रूरत इस बात की है कि हम बारम्बार इस संख्या-रेखा पर लौटें और उनसे इस तरह के सवाल पूछें। विज्ञान या खेलकूद की कक्षा में भी अवसर मिलने पर ऐसे सवाल पूछे जा सकते हैं।

- E3) मसलन, यह कि, -2 की तुलना में -10 शून्य से ज़्यादा दूर है और -10 से +2 की ओर चलते हुए हम शून्य के करीब आते हैं।
- E4) 2 पांसे लीजिए — एक सामान्य पांसा हो और दूसरे के तीन पहलुओं पर '-' चिन्ह तथा तीन पहलुओं पर '+' चिन्ह लगे हों, जैसा कि चित्र 10 में दिखाया गया है। हर बार पांसे फेंकने के बाद बच्ची को यह देखना होगा कि दोनों पांसों पर क्या आया है। यदि सामान्य पांसा 4 दिखाता है और चिन्ह पांसा '+' दिखाता है तो +4 आया है। यदि चिन्ह पांसा '-' दिखाता है तो -4 आया है। इसी के मुताबिक वह संख्या-पट्टी (चित्र 8) पर 4 स्थान दाई ओर या बाई ओर चलेगी। हर बार जब बच्ची यह करे तो उसे प्रेरित करें कि वह बोलकर बताए कि वह क्या कर रही है, और क्यों।



चित्र 10 : 'धन-ऋण' पांसा

इस गतिविधि को एक व्यक्तिगत या सामूहिक खेल के रूप में भी किया जा सकता है।

- E5) हर ढक्कन को +1 और हर डिबिया को -1 मान लें। तो, एक ढक्कन व एक डिबिया परस्पर एक-दूसरे को शून्य कर देंगे। यानी एक पूरी माचिस शून्य दर्शाएगी। अब मान लीजिए कोई बच्ची 3 और -5 को जोड़ना चाहती है। तो सबसे पहले तो वह 3 ढक्कन और 5 डिबिया ले लेगी। फिर इनमें से जितने कट सकते हैं काट देगी। तीन जोड़ियां बन गईं। उसके पास 2 डिबिया बचेंगी। यानी -2. तो, $3 + (-5) = -2$.

इस सवाल को कई बार, अलग-अलग चीजों, जैसे संख्या-रेखा, पेन व उनके ढक्कन, वगैरह, लेकर हल करना चाहिए। इस तरह उसके मन में यह बात बैठ जाएगी कि $3 + (-5) = -2$.

धीरे-धीरे इन अलग-अलग चीजों को हटाकर सिर्फ संख्या-रेखा रखी जा सकती है, जब तक कि बच्ची नियम को न पकड़ ले।

- E6) यह खेल सांप-सीढ़ी जैसा ही है। दो खिलाड़ी या दो समूह इसमें भाग ले सकते हैं। प्रत्येक के पास अलग रंग का बटन या प्लास्टिक की गोटी हो। वे अपने-अपने बटन को चित्र 8 में दिए गए जैसे संख्या-पट्टी के शून्य पर रखें। शुरू करने के लिए खिलाड़ी क टोकनों के

डब्बे को अच्छे से हिलाए और एक टोकन निकाल ले। मान लीजिए कि +8 आया, तो वह अपना लाल बटन पट्टी पर दाईं ओर ले जाकर +8 के खाने पर रख दे। फिर खिलाड़ी ख की बारी आएगी। ख ने टोकनों के डब्बे को हिलाया और मान लीजिए -5 निकाला। उसको अपना हरा बटन बाईं ओर चलाकर -5 पर रखना होगा। फिर क की बारी आ जाएगी। हर बारी खिलाड़ी अपने बटन की स्थिति निम्नानुसार बदल सकेगी :

- i) यदि टोकन धनात्मक संख्या दिखाए, तो उतने खाने दाईं ओर चले।
- ii) यदि संख्या ऋणात्मक है, तो उतने खाने बाईं ओर चलें। जिस खिलाड़ी का बटन -50 पर पहुँच जाए वह खेल से हट जाए।

जिस खिलाड़ी का बटन सबसे पहले 50 पर पहुँचे वह विजेता। इस खेल को एक समय पर कितने भी खिलाड़ी खेल सकते हैं, बशर्ते कि उनके पास अलग-अलग रंग के बटन हों।

- E7) यह और कुछ नहीं, संख्या-रेखा का ही एक रूप है। समय के संदर्भ में इसका उपयोग करते हुए हम बच्चों को संक्रियाओं का अभ्यास करा सकते हैं। उदाहरण के लिए, हम बच्चों से पूछ सकते हैं कि "मान लो तुम्हारी परीक्षा 3 दिन पहले शुरू हुई थी और कुल 9 दिन चलने वाली है। तो बताओ कि आज के बाद कितने दिन और परीक्षा चलेगी?" या "दो दिन पहले मैं अपनी नानी के यहां गई थी। उससे 5 दिन पहले मेरी छुट्टियां शुरू हुई थीं। तो बताओ मेरी छुट्टियां कितने दिन पहले शुरू हुईं?" इन सवालों को हल करने के लिए उन्हें समय-रेखा का उपयोग करने दें।

इस तरह के कई और उदाहरण बनाए जा सकते हैं। समय-रेखा को बड़ा करके, लंबी अवधियों को शामिल किया जा सकता है। आप इतिहास की विभिन्न घटनाओं पर, उनके घटित होने के वर्षों की बात कर सकते हैं। इसके बाद आप उनसे पूछ सकते हैं कि कौन सी घटना किससे पहले हुई। आप बच्चों से ऐसी पहेलियां भी पूछ सकते हैं जिनसे बच्चों को ऐसे विचार समझने में मदद मिले कि 3000 ईसा पूर्व ज्यादा पहले की बात है बनिस्बत 2000 ईसा पूर्व के। उन्हें इस तरह के अभ्यास करवाए जा सकते हैं:

1. इस वक्त् राजू की उम्र 10 वर्ष है। वह किस वर्ष में पैदा हुआ था?
2. मेरी दादी का देहान्त सन् 1995 में 103 वर्ष की उम्र में हुआ। वे किस वर्ष में पैदा हुई थीं?
3. पायथागोरस की मृत्यु 597 ईसा पूर्व में 85 वर्ष की उम्र में हुई थी। उसका जन्म कब हुआ था?
4. यूक्लिड का जन्म 325 ईसा पूर्व में हुआ और वह 55 वर्ष जीया। उसकी मृत्यु कब हुई?

इकाई 10 अंकगणित से बीजगणित की ओर

इकाई की रूपरेखा	पृष्ठ संख्यां
10.1 परिचय	19
उद्देश्य	20
10.2 बीजगणित क्यों सीखें?	20
10.3 बीजगणित कैसे सीखें?	23
10.4 चरों का इस्तेमाल	27
सूत्रों में इस्तेमाल	27
समीकरणों में इस्तेमाल	29
10.5 सारांश	32
10.6 अभ्यासों पर टिप्पणियां	32

10.1 परिचय

पिछले कुछ हफ्तों में हम अपने आस-पड़ोस के लोगों से मिले। यह समझने के लिए कि बीजगणित को लेकर उनका रवैया क्या है। हमने पाया कि अधिकांश स्कूली बच्चे गणित से घबराते हैं, खासकर बीजगणित से। बातचीत के दौरान बहुत से मां-बाप ने यह स्वीकार करने में गर्व महसूस किया कि जब वे स्कूल में थे तब बीजगणित में कमजोर थे। जब उनसे इसका कारण पूछा गया तो अधिकांश ने बताया कि बीजगणित करने के लिए काफी पेचीदा सूत्रों का इस्तेमाल करना पड़ता था और इन्हें याद रखना मुश्किल है। कई लोगों को तो लगता था कि स्कूलों में बीजगणित पढ़ाया ही क्यों जाता है, क्योंकि उन्हें इसका कोई उपयोग नज़र नहीं आता था।

बीजगणित को लेकर लोगों का रवैया ऐसा क्यों है? स्थिति को बेहतर बनाने के लिए क्या किया जाए? इस इकाई में हम इन प्रश्नों का उत्तर देने की कोशिश करेंगे। हम बीजगणित पढ़ाने के ऐसे कुछ तरीकों पर विचार करेंगे जिनसे बच्चों को बीजगणित और बीजगणित को बच्चे प्रिय लग सकें।

बीजगणित से बच्चों की पहली मुलाकात 'व्यापकीकृत अंकगणित' के रूप में होती है। भाग 10.2 में हम चर्चा करेंगे कि इसका अर्थ क्या है। हम यह भी देखेंगे कि बीजगणित को क्यों पढ़ा जाए। हमने खास तौर से इस बात पर ध्यान दिया है कि व्यापकीकरण का अर्थ क्या है और कौन से व्यापकीकरण स्वीकार योग्य होते हैं।

अगले भाग में हम चर की अवधारणा पर बात करेंगे। बीजगणित की भाषा सीखने व इस्तेमाल करने के लिए यह अवधारणा ज़रूरी है, और बच्चों के लिए इसे समझना बहुत मुश्किल होता है। बच्चे चर की अवधारणा तथा इसका उपयोग न समझने की वजह से जो आम ग़लतियां करते हैं, उनकी सूची हमने यहां दी है। इस भाग में हमने बच्चों को धीरे-धीरे और सावधानीपूर्वक इस अवधारणा की ओर ले जाने के तरीके भी सुझाए हैं।

भाग 10.4 में हमने इस बात पर विचार किया है कि बच्चों से चरों (variables) का उपयोग किस तरह से करने की अपेक्षा की जाती है। सूत्रों को लागू करते हुए तथा समीकरण सलझाते वक़्त वे

इनका उपयोग करते हैं। चरों का इस्तेमाल करते वक्त आम बच्ची मशीनी ढंग से कुछ नियमों को लागू करती जाती है। वह यह नहीं समझ पाती कि इसमें क्या बीजगणित शामिल है। हमने सिखाने के कुछ ऐसे तरीके सुझाए हैं जिनसे स्थिति को सुधारने में मदद मिल सकती है।

बीजगणित ही नहीं, बल्कि पूरा गणित ही, व्यापकीकरण से बना है। इसके कुछ पहलुओं की चर्चा हम इकाई 1 में कर चुके हैं, और इस इकाई में भी करेंगे। इसलिए आप इस इकाई को शुरू करने से पहले इकाई 1 पर एक सरसरी नज़र डाल लें।

आइए अब इकाई के उद्देश्यों को देख लें।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- यह बता पाएंगे कि बीजगणित सीखते वक्त बच्चे कौन से कौशल विकसित करते हैं;
- ऐसे तरीके सुझा पाएंगे जिनसे कक्षा 6 व उससे बड़ी कक्षा के बच्चे अंकगणितीय सिद्धांतों का व्यापकीकरण करना सीख सकें;
- चरों से निपटते वक्त बच्चों द्वारा की जाने वाली आम गलतियों को पहचान पाएंगे;
- बच्चों को चर की अवधारणा सिखाने के तरीके सुझा पाएंगे;
- बच्चों को चरों का इस्तेमाल करने में मदद देने के तरीकों का वर्णन कर पाएंगे;
- अपनी शिक्षण विधि के असर का आकलन कर पाएंगे।

10.2 बीजगणित क्यों सीखें?

बीजगणित का अंग्रेजी शब्द Algebra दरअसल अरबी शब्द 'अल-जब्र' से बना है।

बीजगणित से बच्चों का पहला सम्पर्क 'व्यापकीकृत अंकगणित' के रूप में होता है, यानी जब वे अंकगणितीय पैटर्न, नियम और सम्बन्धों का अध्ययन करते हैं, उन्हें समझने की कोशिश करते हैं, उनका व्यापकीकरण करने की कोशिश करते हैं और उन्हें शब्दों व प्रतीकों का उपयोग करते हुए सटीक ढंग से व्यक्त करते हैं। व्यापक अंकगणितीय पैटर्न खोजने का एक उदाहरण देखिए :

जब हम विभिन्न संख्याओं को, 10 से गुणा करते हैं, मान लीजिए

$$10 \times 1 = 10$$

$$10 \times 3 = 30$$

$$10 \times 7 = 70$$

$$10 \times 12 = 120$$

$$10 \times 26 = 260$$

$$10 \times 365 = 3650$$

$$10 \times 270 = 2700$$

तो गुणनफल में एक पैटर्न नज़र आता है। इस पैटर्न के आधार पर हम 10 से गुणा करने की प्रक्रिया के सम्बन्ध में एक व्यापक नियम बना सकते हैं, यानी

'किसी भी संख्या का 10 से गुणज प्राप्त करने के लिए उस संख्या के प्रत्येक अंक को एक स्थान बाईं ओर खिसकाकर इकाई के स्थान पर शून्य लिख देंगे।'

जैसा कि आप इकाई 1 में पढ़ चुके हैं, विशिष्ट उदाहरणों से व्यापकीकरण तथा व्यापक सम्बंधों से विशिष्टीकरण करने की क्षमता गणितीय सोच का जरूरी हिस्सा है। यह मानसिक क्षमता सिर्फ गणित तक सीमित नहीं है। हमें इसकी जरूरत रोजमर्रा के जीवन में बार-बार पड़ती है, मसलन जब हम पशु, नीला, लड़की, गोल, वगैरह की अवधारणाओं की समझ बनाते हैं।

गणित सिखाने के विभिन्न पहलू

इसी तरह, अपने रोजमर्रा के अनुभवों से व्यापकीकरण करने की अपनी क्षमता की ही बदौलत हम उम्मीद करते हैं कि रोजाना सूरज पूर्व में चढ़ेगा और पश्चिम में डूबेगा, या हम मानते हैं कि इंसान नश्वर है, वगैरह।

यहां हमें इस बात पर ध्यान देने की जरूरत है कि आम भाषा में और गणित में 'व्यापक' के इस्तेमाल में क्या फर्क है। जब हम हिन्दी में इसका इस्तेमाल करते हैं तो हमारा मतलब 'आमतौर पर' होता है, न कि 'हर बार'। मसलन, हम मानते हैं कि 'केरल में मानसून व्यापक रूप से मई के अन्त में आता है', हालांकि ऐसा हर वर्ष नहीं होता।

लेकिन जब हम गणित में 'व्यापक' का इस्तेमाल करते हैं, तो हमारा मतलब होता है कि वह कथन जिस पर इसे लागू किया गया है, उन सभी स्थितियों के लिए सत्य होगा जो कथन में दी गई शर्तों को पूरे करते हों। मसलन, 'व्यापक रूप से, यदि किसी पूर्णांक का सबसे दाएं वाला अंक 5 हो, तो वह पूर्णांक 5 का गुणज होगा।' गणितीय तौर से स्वीकार योग्य कथन है क्योंकि यह उन सभी पूर्णांकों के लिए सही है जिनका सबसे दाएं वाला अंक 5 हो। लेकिन यह कथन कि 'व्यापकतः अभाज्य संख्याएं विषम संख्याएं होती हैं।' गणितीय तौर से स्वीकार योग्य न होगा हालांकि यह एक स्थिति को छोड़ (यानी संख्या 2 के अलावा) बाकी सभी अभाज्य संख्याओं के लिए सही है। इसी प्रकार से यह व्यापकीकरण भी स्वीकार योग्य नहीं है कि सभी विषम संख्याएं अभाज्य होती हैं, क्योंकि मसलन 9 एक विषम संख्या है जो अभाज्य नहीं है।

जिस संख्या के गुणनखंड सिर्फ 1 व स्वयं वह संख्या हो, अभाज्य संख्या (prime number) कहलाती है। इस तरह 5 एक अभाज्य संख्या है जबकि 9 नहीं।

तो, कोई भी गणितीय व्यापकीकरण करते वक्त हमें बहुत सतर्क रहना होगा कि यदि एक भी स्थिति ऐसी मिले जिसके लिए यह व्यापकीकरण सही नहीं है, तो इस व्यापकीकरण को छोड़ देना होगा। इसी सम्बंध में एक अभ्यास, आपके लिए।

E1) अपने रोजमर्रा के जीवन में दिखने वाले व्यापक नियमों के तीन उदाहरण दीजिए। इनमें से कौन-कौन से नियम गणितीय तर्क की दृष्टि से स्वीकार योग्य होंगे?

आइए अब यह देखें कि बीजगणित सीखने के दौरान बच्चे कौन-कौन से कौशल सीखते हैं। जैसे-जैसे बच्चों को आम जीवन में और गणित में व्यापकीकरण के ज्यादा से ज्यादा अवसर मिलते जाते हैं, वैसे-वैसे वे कई क्षमताएं विकसित करते जाते हैं। मसलन, वे किसी समूह के सदस्यों के सामान्य गुणों को ढूंढना सीख जाते हैं। वे गणित में तथा अन्य क्षेत्रों में व्यापक पैटर्न और सम्बंध खोजना सीखते हैं। इससे उनमें अमूर्तता से निपटने की क्षमता विकसित होती है। वे सिर्फ एक सदस्य के बारे में न सोचकर, समूचे समूह के बारे में सोचना सीखते हैं। और बीजगणित की भाषा का इस्तेमाल करते हुए उन्हें अपने सोच में तथा नियमों व सम्बंधों को व्यक्त करने में ज्यादा तार्किक, स्पष्ट व सही होने में मदद मिलती है।

बीजगणित सीखने की खास वजह को समझने के लिए निम्नलिखित सवालों / पहेलियों पर गौर कीजिए।

1. एक संस्था व उसका आधा जोड़ने पर 63 मिलता है। वह संख्या क्या है?

(ईसा से 1700 वर्ष पूर्व मिस्र के लोगों को इस तरह के सवाल हल करने के लिए दिए जाते थे।)

2. एक पिता अपने बेटे से 30 साल बड़ा है। 10 साल पहले पिता की उम्र बेटे से 4 गुणा थी। इस वक्त पिता की उम्र क्या है?
3. 5 चाय और 4 वड़ों की कीमत 18.50 रुपए है। लेकिन 4 चाय और 5 वड़ों की कीमत 17.50 रुपए होती है। एक चाय की कीमत क्या होगी?
4. जब कॉफी की कीमत 20 प्रतिशत बढ़ी तो एक व्यक्ति ने अपनी कॉफी का इस्तेमाल 20 प्रतिशत कम कर दिया। उसका खर्चा बढ़ेगा या घटेगा? और कितने प्रतिशत?
5. दो संख्याओं का जोड़ 100 है तथा उनका गुणनफल 2499 है। वे दो संख्याएं क्या हैं?
6. एक कार 40 कि०मी० प्रति घण्टे की रफ्तार से पहाड़ी पर चढ़ती है और तुरंत बगैर रुके 60 कि०मी० प्रति घण्टे की रफ्तार से उतर जाती है। कार की औसत रफ्तार क्या होगी?

इन सवालों को कैसे हल करें? क्या हम इन्हें परीक्षण यानी जांच व भूल सुधार, के तरीके से हल कर सकते हैं? मतलब हम कोई एक संख्या मान लें और फिर उनके अनुसार सवाल को हल करने की कोशिश करें। आइए देखें कि इस तरीके से हम पहला सवाल हल कर सकते हैं या नहीं।

मान लीजिए कि वह संख्या 100 है। सवाल में दी गई जानकारी के मुताबिक 100 और उसका आधा जोड़ने पर 63 आना चाहिए। मगर ऐसा है नहीं। यानी 100 वह संख्या नहीं हो सकती। चलिए अन्य संख्याएं आजमाते हैं। नीचे तालिका में हमने यही किया है। अलग-अलग संख्याएं लेकर जोड़ निकालकर सामने लिख दिया है।

मानी गई संख्या	उस संख्या का आधा	जोड़
100	50	150
40	20	60
50	25	75
60	30	90

इनमें से कोई भी संख्या वांछित उत्तर नहीं दे रही है। पता नहीं हमें कितनी संख्याओं को आजमाना होगा, तब जाकर शायद हमें उत्तर मिल जाए।

इसकी बजाए क्यों न हम एक व्यापक संख्या ले लें, उसे x कहें, और इसके आधार पर आगे बढ़ें? हमें पता है कि x और x के आधे का जोड़ 63 है, यानी $x + \frac{1}{2}x = 63$

$$\text{यानी } (3/2) \cdot x = 63$$

$$\text{यानी } x = 63 \times \frac{2}{3} \quad (\text{दोनों तरफ } 2/3 \text{ का गुणा करके})$$

$$\text{यानी } x = 42.$$

एक के बाद एक विशिष्ट संख्याएं लेने की बजाय एक व्यापक संख्या x को लेकर हमें कितनी आसानी से उत्तर मिल गया! यह एक उदाहरण है जो दिखाता है कि पेचीदा नज़र आने वाले सवालों को बीजगणित के इस्तेमाल से बड़ी आसानी से हल किया जा सकता है।

बीजगणित सीखने का एक और कारण है मज़ा! गणित के कई खेलों व पहेलियों का हल बीजगणित में है। मसलन, संख्या सोचने के इस खेल को देखिए :

दो अंकों की कोई भी संख्या सोच लीजिए। अंकों की अदला-बदली कर दीजिए। नई संख्या को

पहली वाली संख्या में जोड़ दीजिए। योगफल में पहली वाली संख्या के अंकों के जोड़ से भाग दे दीजिए। आपका उत्तर 11 आएगा! (इन खेलों के बारे में बातचीत भाग 10.4 में करेंगे।)

अंकगणित से बीजगणित की ओर

अब आप निम्नलिखित अभ्यास कर सकते हैं।

E2) आप ऊपर दिए गए 6 सवालों में से दूसरे को कैसे हल करेंगे? आप इसे बीजगणित के इस्तेमाल से कैसे हल करेंगे? कौन सी विधि ज्यादा सरल है?

E4) अंकगणित का व्यापकीकरण करने की क्षमता सीखने के अन्य कारण सोचकर बताइए।

अब शायद आप सहमत होंगे कि बच्चों को बीजगणित सीखने की जरूरत है। आप शायद इस बात से भी सहमत होंगे कि वे इसे एक ऐसी प्रक्रिया के जरिए सीखें जिसमें उन्हें मजा आए और उनकी रुचि बनी रहे। बदकिस्मती से, जिस ढंग से हम उन्हें बीजगणित सिखाते हैं, उसका नतीजा यह होता है कि बच्चों में अरुचि पैदा हो जाती है और वे कई मुश्किलों का सामना करते हैं। आइए इन मुश्किलों व उनसे निपटने के कुछ तरीकों पर बातचीत करें।

10.3 बीजगणित कैसे सीखें?

पिछले भाग में आपने देखा कि बीजगणित से बच्चों का पहला सम्पर्क व्यापकीकृत अंकगणित के भेष में होता है। आप यह तो मानेंगे कि इस सम्पर्क की तैयारी में उन्हें पैटर्न पहचानने तथा अपने द्वारा खोजी गई बात को स्पष्ट रूप में प्रस्तुत करने की क्षमता विकसित करनी होगी। इसके लिए जरूरी है कि जब से बच्चे संख्या सीखना शुरू करें, तब से ही उन्हें संख्या से जुड़े पैटर्न व सम्बंध पहचानने व उपयोग करने के कई सारे अवसर दिए जाएं। हमें उनकी मदद करनी चाहिए कि वे इन पैटर्नों के आधार पर व्यापकीकरण करने की क्षमता विकसित कर पाएं। उदाहरण के तौर पर, जब वे जोड़ना सीख रहे हों, तब उन्हें व्यापक बात खोजने को प्रेरित किया जा सकता है कि जोड़ एक क्रमविनिमेय संक्रिया है जबकि घटाना नहीं है (देखें इकाई 7)। या, जब बच्चे गुणा करना सीख रहे हों, तब उन्हें 10 से गुणा का नियम (जिसका जिक्र हम कर चुके हैं) निकालने में मदद दी जा सकती है।

हां, यह जरूर है कि कभी-कभी बच्चे ग़लत व्यापकीकरण भी कर लेते हैं, जैसे 'गुणा करने पर संख्या बढ़ती है'। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि उन्होंने यह बात धनात्मक संख्याओं के संदर्भ में देखी होती है (मसलन 2×3 , 2 से ज्यादा होता है, वगैरह)। लेकिन आप उनसे पूछ सकते हैं कि क्या यह बात हमेशा सही होती है। आप उनसे विभिन्न स्थितियों में इस बात की जांच करवा सकते हैं। मसलन, उनसे पूछिए कि यदि गुणा में एक संख्या शून्य हो, तो क्या होता है। जब वे यह देख लें कि उनका व्यापकीकरण इस मामले में सही नहीं है, तो उन्हें इसे बदलना सीखना होगा। शायद उनका बदला हुआ व्यापकीकरण 'किन्हीं भी दो शून्येतर संख्याओं का गुणा करने पर उन दोनों से बड़ी संख्या आती है' हो। तब आप उनसे जांचने को कह सकते हैं कि उनका व्यापकीकरण $1/2$ जैसी किसी भिन्न संख्या पर लागू होता है या नहीं। इसी प्रकार सीखने की यह प्रक्रिया आगे चल सकती है।

इस तरह से आप बच्चों को यह सीखने में मदद कर सकते हैं कि व्यापकीकरण करते हुए सावधानी रखने की जरूरत होती है तथा कोई व्यापकीकरण सही न होने पर उसे बदलना/छोड़ना भी पड़ सकता है।

E4) बच्चों द्वारा किए जाने वाले किसी गलत गणितीय व्यापकीकरण का उदाहरण दीजिए। आप उन्हें यह समझने में कैसे मदद करेंगे कि यह गलत है?

बीजगणित का विकास पैटर्न, सम्बंधों तथा व्यापकीकरण की तलाश में से होता है। जो अवधारणा हमें व्यापक सम्बंधों का अध्ययन करने में मदद देती है, वह है चर की अवधारणा। यह कोई अक्षर (जैसे a, b, x, y, क, ख,.....) होता है जो एक या ज्यादा संख्याओं को दर्शाता है। इसका अर्थ यह है कि कुछ स्थितियों में यह अक्षर सिर्फ एक संख्या को दर्शाता है (जैसा कि E2 में था), और कभी-कभी यह कई संख्याओं को दर्शाता है (जैसे, यदि $x + 1$, 9 से कम है तो x, 8 से कम कोई भी संख्या हो सकती है)। यानी यह कई अलग-अलग मान ले सकता है। इसीलिए इसे चर कहते हैं।

'चर' की समझ विकसित करना बीजगणित की समझ विकसित करने के लिए निहायत जरूरी है। और यहीं बच्चे सबसे बड़ी बाधा महसूस करते हैं। 'मान लीजिए x कोई भी संख्या है' जैसे कथन समझना बच्चे के लिए बहुत हा कठिन होता है। दरअसल, यह पहली बार नहीं है कि बच्चे का सामना ऐसे अक्षरों से हो रहा है जो किसी संख्या को दर्शाते हैं। कक्षा 4 व 5 की कई पाठ्यपुस्तकें ' $2+3 = 3+2$, $4+5 = 5+4$ ' जैसे विशिष्ट उदाहरणों से छलांग लगाकर ' $a + b = b + a$, जहां a और b कोई भी दो संख्याएं हैं' जैसे कथनों पर पहुंच जाती हैं। बच्ची इन्हें स्वीकार नहीं कर पाती। वह या तो इसे अनदेखा कर देती है या अक्षरों के ऐसे इस्तेमाल को समझने से उसका दिमाग इनकार कर देता है। इसलिए जब बच्चों का परिचय चर से कराया जाता है, तो यह कोई हैरानी की बात नहीं है कि वे इसे समझ नहीं पाते। नतीजा यह होता है कि बीजगणित सीखना शुरू करने से लेकर उससे छुटकारा पाने तक बच्चे कई गलतफहमियां पालते जाते हैं। इनकी वजह से निम्नलिखित जैसी स्थितियां सामने आती हैं।

- बच्ची यह नहीं समझती कि अक्षर किसी संख्या को दर्शाता है। इसलिए वह इसे अनदेखा कर देती है। मसलन, वह कहेगी कि $3x + 4 = 7$ होता है।
- बच्ची समझती है कि यह अक्षर कुछ चीजों को दर्शाता है। जैसे जब 11-वर्षीय रश्मि से पूछा गया कि $7p$ में p क्या है तो उसका जवाब था कि यह कुछ भी हो सकता है—सेब, पेंसिल, किताबें, वगैरह।
- बच्ची सोचती है कि यह अक्षर उन चीजों को दर्शाता है जिनके नाम इस अक्षर से शुरू होते हैं। मसलन, अमर ने जोर देकर कहा कि $3a$ में a सिर्फ apple या alligator को दर्शा सकता है, banana को नहीं "क्योंकि तब तो यह $3b$ होगा।"

इस धारणा का कारण यह हो सकता है कि बच्चे इकाइयों के लिए लघु रूपों का इस्तेमाल करते रहे हैं (जैसे 3 मीटर के लिए 3 मी०)।

- बच्ची सोचती है कि अक्षर किसी खास संख्या को दर्शाता है। बतौर उदाहरण, जब सब्बा से पूछा गया कि यदि $x + 6$, 10 से कम हो, तो x क्या होगा, तो उसने जवाब दिया $x = 1$ होगा। जब पूछा गया कि क्या और भी कोई संभावना हो सकती है, तो उसने कहा, नहीं हो सकती।

- ज्यादातर बच्चे $2a$, a^3 जैसे प्रस्तुतीकरण से चक्कर में पड़ जाते हैं। वे मसलन, a^3 और $3a$ में फर्क नहीं करते। कई बार जब उन्हें $3a$ और $2a$ को जोड़ने को कहा जाता है, तो वे a^5 लिख देते हैं।

- vi) कई बच्चे यह नहीं समझ पाते कि संक्रियाओं के नियम कैसे लागू करें। कुछ बच्चे $3x + x + 5x = 8x$ लिख देते हैं, x का गुणांक 1 को अनदेखा करते हुए। कुछ $a^m - n = a^m - a^n$ लिख देते हैं।

ऐसी कई और गलतियाँ आपने भी देखी होंगी। निम्नलिखित अभ्यास करते हुए आप इनकी सूची बनाइए।

E5) चर की अवधारणा के उपयोग से सम्बंधित तीन और ऐसी गलतियाँ बताइए, जो बच्चे करते हों।

बच्चों को ऐसी गलतफ़हमियों से छुटकारा पाने में मदद कैसे करें? इस संदर्भ में कोई भी तरीका सोचते वक़्त हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि बहुत धीमे-धीमे आगे बढ़ना होगा। हमें यह याद रखना चाहिए कि चर की अवधारणा जल्दबाज़ी में हासिल नहीं की जा सकती। अवधारणा तक पहुँचने से पहले बच्चे को कई चरणों से होकर गुज़रना होगा।

अपने तरीके का खाका बनाने से पहले शायद आप यह देखना चाहें कि इस संदर्भ में सुश्री आचार्य क्या कहती हैं।

उदाहरण 1 : सुश्री आचार्य पिछले कुछ वर्षों से नगर निगम के स्कूल में कक्षा 6 के बच्चों को गणित पढ़ा रही हैं। इस दौरान वह इस बात का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करती रही है कि वह बच्चों को चर की अवधारणा कितने अच्छे से पढ़ा पा रही हैं। हर बार उसे इस बारे में जो जानकारी मिलती है, उसके आधार पर वह अपने सिखाने के तरीके में बदलाव लाती है। फ़िलहाल वह निम्नलिखित तरीके को 'सफल' मानती है।

सुश्री आचार्य बताती हैं, "बच्चे जब मेरे पास आते हैं, तो उन्हें संख्याओं की एक समझ होती है, तथा उन पर संक्रियाएं लागू करने का अनुभव होता है। मैं कोशिश करती हूँ कि उनके इस अनुभव के आधार पर ही उन्हें बीजगणित से परिचित कराऊँ।" वह करती यह है कि कक्षा में, मसलन एक बन्द बड़ा डिब्बा लेकर आती है। बच्चे सोचने लगते हैं कि इसमें क्या होगा। वह बच्चों को बताती है कि वह इसमें आम भरकर अपने दोस्त को भेजने वाली है। फिर उनसे पूछती है, "तुम्हारे ख्याल से इसमें कितने आम आ जाएंगे?" कक्षा के चारों कोनों से अलग-अलग जवाब आने लगते हैं — 50, 40, 60, वगैरह। तब वह कहती है, "ठीक है। तुम अपनी-अपनी संख्याएं याद रखना। अब यदि मैं इसमें 5 आम और जोड़ दूँ, तो मेरे पास कितने आम हो जाएंगे?" थोड़ी हिचक, के बाद कक्षा में 'से आवाज़ें आने लगती हैं — 55, 45, 65 आदि संख्याओं से। तब वह बोर्ड पर लिख देती है कि अब उनके पास कितने आम होंगे:

(आमों की संख्या) + 5

सुश्री आचार्य मानती हैं कि इस मुकाम पर पहुँचना तथा इसे समझना बच्चों के लिए बहुत मुश्किल होता है। वे इससे काफ़ी देर तक जूझते हैं। वह उन्हें प्रोत्साहित करती है कि वे इस विषय में अपने विचारों की चर्चा करें कि उनके ख्याल से हो क्या रहा है। कभी-कभी बहस भी हो जाती है। लेकिन धैर्यपूर्वक तथा विभिन्न संख्याओं के साथ बारम्बार जाँच करने के बाद वे ऊपर दिए गए प्रस्तुतीकरण को मान लेते हैं।

फिर वह उनसे पूछती है, "अब मान लो छोटू (उन्हीं में से एक बच्चा) इनमें से 2 आम खा जाए। तो मेरे पास कितने आम बचेंगे?" वह और बच्चे इस पर चर्चा करते हैं और हम नतीजे पर

पहुंचते हैं कि उनके उत्तरों, 53, 43 वगैरह, को निम्नानुसार भी लिखा जा सकता है:

$$(\text{आमों की संख्या}) + 5 - 2$$

जो $(\text{आमों की संख्या}) + 3$ के बराबर है।

वह उनका ध्यान इस बात की ओर लाती है कि हर बार 'आमों की संख्या' लिखने में फ़ालतू मेहनत लगती है। फिर उनसे ही पूछती है कि क्या इससे बचने का कोई तरीका हो सकता है। वह उन्हें यह बता देती है कि चूंकि आमों की ठीक-ठीक संख्या पता नहीं है, इसलिए उस जगह पर कोई एक संख्या नहीं लिखी जा सकती। क्या इसके लिए कोई छोटा चिन्ह लिख सकते हैं? यदि इस संख्या को n कहें तो कैसा रहे? तब 'आमों की संख्या' लिखने की बजाय सिर्फ n लिखा जा सकता है, जहां n कोई भी संख्या हो सकती है। बच्चे आम तौर पर इससे सहमत होते हैं। तब वह बोर्ड पर $n + 3$ लिख देती है, और साथ ही कह देती है कि उसके पास अब $n + 3$ आम हैं। "अब मान लो कि मैं उसी साइज़ का आमों का एक और डिब्बा इसमें जोड़ देती हूँ। तब मेरे पास कितने आम हो जाएंगे?" बच्चों को इसके बारे में सोचने में शामिल करते हुए धीरे-धीरे वह उनसे लिखवा लेती है:

$$n + n + 3.$$

इस मुकाम पर वह एक तालिका बना देती है:

डिब्बे में आमों की संख्या	10	20	30	 n
दो डिब्बों में आमों की संख्या	20	40	60	 $n + n$
मेरे पास आमों की संख्या	23	43	63	 $n + n + 3$

यहां वह पूछ सकती है, "क्या हम पक्के तौर पर कह सकते हैं कि डिब्बे में आमों की संख्या 10 है? या 20 है? या 30 है?" उदाहरणों के ज़रिए वह उन्हें यह समझने में मदद करती है कि संख्या कुछ भी हो सकती है — 15, 25, 47... और इनमें से किसी भी संख्या के लिए वे $2n + 3$ निकाल सकते हैं, जो कि उसके पास मौजूद आमों की संख्या होगी। फिर वह उन्हें यह बताती है आमों की संख्या दर्शाने के लिए वे जिस अक्षर n का उपयोग कर रहे हैं वह एक चर है क्योंकि यह कोई भी संख्या हो सकती है।

वह इसी तरह आगे बढ़ते हुए कोशिश करती है कि बच्चे चर के अर्थ व इस्तेमाल के बारे में सोचें। उनकी समझ को पुख्ता बनाने के लिए वह नीचे दिए गए जैसे कुछ उदाहरण भी उनके साथ करती है।

- बच्चे और उसकी मां की उम्र के बीच का सम्बंध : उदाहरण के लिए, वह उन्हें बताती है कि मां की उम्र बच्चे की उम्र के 5 गुने से 6 वर्ष ज्यादा है। फिर वह उनसे कहती है कि वे आपस में चर्चा करके बताएं कि इस सम्बंध को कैसे दर्शाएंगे। (यदि बच्चे की उम्र को चर x मान लें, तो मां की उम्र $(5 \times x + 6)$ होगी।)
- किसी प्राकृतिक संख्या की अगली प्राकृतिक संख्या : वह उनसे पूछती है कि वे इस बात को प्रतीकों से कैसे दर्शाएंगे कि किसी प्राकृतिक संख्या की अगली प्राकृतिक संख्या 1 जोड़ने से प्राप्त होती है। (यदि संख्या n है, तो अगली संख्या $n + 1$ होगी।)
- तिकोन बनाने के लिए ज़रूरी तीलियों की संख्या : वह बच्चों से पूछती है कि 1 तिकोन

बनाने के लिए कितनी तीलियां लगती हैं? दो तिकोन, जो एक-दूसरे को न छुएं, बनाने में कितनी लगेंगी? वगैरह। वह उनके जवाबों को एक तालिका के रूप में लिख देती है:

तिकोनों की संख्या	1	2	3	
तीलियों की संख्या	3	6	9	

फिर वह उनसे कहती है कि तिकोनों की संख्या और उनमें लगने वाली तीलियों की संख्या के बीच सम्बंध पता करें। एक बार वे पैटर्न पहचान लेते हैं, तो वह उनसे कहती है कि इसे प्रतीकों में लिखें। (x तिकोन बनाने के लिए आपको $3 \times x$ तीलियां लगेंगी।)

iv) वह उन्हें नीचे दिए गए जैसे संख्या-पैटर्न दिखाती हैं।

$$2 \times 1 + 15 = 17$$

$$2 \times 0 + 17 = 17$$

$$2 \times 5 + 7 = 17$$

$$: : :$$

$$: : :$$

फिर वह उनसे कहती है कि वे संख्याओं की दस और जोड़ियां पता करें जिन्हें

$$2 \times \square + \bigcirc = 17 \text{ के चकोर व गोले में लिखा जा सके।}$$

सुश्री आचार्य बच्चों के साथ पूरे साल भर, समय-समय पर ऐसे उदाहरण व अभ्यास करती रहती है। उसे लगता है कि इस तरह से बच्चे चर का मतलब सीख पाते हैं।

—X—

और अब इसी के बारे में एक अभ्यास।

E6) सुश्री आचार्य के तरीके की खूबियां व कमियां क्या हैं?

E7) ऊपर दिए गए प्रश्नों के समान तीन और ऐसे उदाहरण बनाइए जिनमें किसी संबंध को चर के इस्तेमाल से दिखाना हो।

एक बार बच्चे चर की अवधारणा के साथ सहज हो जाएं, तब उन्हें इससे निपटने के तरीके सिखाए जा सकते हैं। आइए, ऐसा करने के कुछ तरीके देखें।

10.4 चर का इस्तेमाल

अगर आप स्कूल के पाठ्यक्रमों को देखें, तो पाएंगे कि स्कूली गणित में चर का इस्तेमाल ज्यादातर निम्नलिखित स्थितियों में होता है :

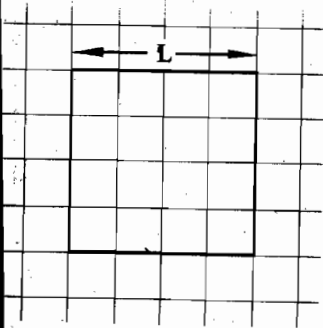
i) सूत्रों में (मसलन, किसी वर्ग की परिधि, वर्ग का क्षेत्रफल, वगैरह)।

ii) समीकरण हल करने में (जैसे, $x + 3 = 10$ तो $x = 7$)।

आइए देखें कि बच्चे इन दो तरह के उपयोगों में कैसे दक्ष हो सकते हैं।

10.4.1 सूत्रों में इस्तेमाल

कुछ दिनों पहले मैं एक गणित केन्द्र में एक कार्यशाला में गई थी। बच्चों को सूत्रों को लागू करना



चित्र 1: चौखाने कागज़ पर
4 इकाई लम्बाई वाला
वर्ग।

सीखने से सम्बंधित बातचीत व चर्चा के दौरान निम्नलिखित बातें सामने आईं।

यह कतई जरूरी नहीं है कि बच्चे जब कक्षा 5 या 6 में पहुंच जाएं तभी उन्हें सूत्रों से परिचय दिया जाए। कक्षा 3 के बच्चे भी सूत्र बनाना और उनका इस्तेमाल करना सीख सकते हैं। इसके लिए हम शुरुआत वर्ग के उदाहरण से कर सकते हैं। हम बच्चों से कह सकते हैं कि वे चौखाने कागज़ की लाइनों का इस्तेमाल करते हुए अलग-अलग लम्बाई के वर्ग बनाएं (देखें चित्र 1)। फिर हम उनसे हरेक वर्ग का परिमाप (perimeter) नापने को कह सकते हैं। उनसे निम्नानुसार चार्ट बनाने को कहा जा सकता है।

वर्ग की लम्बाई	1 इकाई	2 इकाई	5 इकाई	10 इकाई
वर्ग का परिमाप	4 इकाई	8 इकाई	20 इकाई	40 इकाई

बच्चों से कहा जाए कि वे इन परिणामों को देखें और वर्ग की लम्बाई व परिमाप का सम्बंध दर्शाने वाला नियम पता करने की कोशिश करें। हम चर्चा के माध्यम से उन्हें यह नियम पता करने में मदद कर सकते हैं। यदि कोई बच्ची ग़लत नियम पर पहुंच जाती है, तो जरूरी होगा कि हम विस्तार से इस पर चर्चा करें और यह भी समझाएँ कि क्यों यह नियम ग़लत है। चर्चा के माध्यम से हम उन्हें नीचे दिए गए नियम तक पहुंचने में मदद दे सकते हैं:

लम्बाई L के वर्ग का परिमाप $4L$ होता है।

इसी प्रकार से वर्ग के क्षेत्रफल की तालिका बनवाकर क्षेत्रफल का सूत्र भी निकलवाया जा सकता है। क्षेत्रफल को चौखाने कागज़ के वर्गों की संख्या में दिया जा सकता है।

एक बार बच्चे एक चर वाले सूत्रों के साथ सहज हो जाएं, हम उन्हें आयत का परिमाप व क्षेत्रफल के सूत्रों से भी परिचित करा सकते हैं। इनमें दो चरों का इस्तेमाल होता है, जो बात बच्चों को समझने में काफी मुश्किल लगती है। उनकी मदद के लिए हम उनके साथ यह चर्चा कर सकते हैं कि क्यों किसी आयत की भुजा की लम्बाई एक चर है। वे जब इस बात को समझकर मान लें तब वे लम्बाई को L से दर्शा सकते हैं। फिर हम उनसे पूछ सकते हैं, “क्या चौड़ाई भी एक चर है? क्या मैं इसे L मान सकती हूँ? क्यों नहीं? यदि मैं ऐसा करूँ तो क्या होगा?” उन्हें खुद इस नतीजे पर पहुंचने दीजिए कि यदि लम्बाई व चौड़ाई दोनों को एक ही अक्षर से दर्शाया गया, तो वे दोनों बराबर होंगी। ऐसा आयत तो वर्ग हो जाएगा—वह कोई व्यापक आयत नहीं रहेगा।

उनसे चौखाने कागज़ पर अलग-अलग आयत बनवाकर, उन्हें यह निष्कर्ष निकालने दें कि चौड़ाई भी एक चर है, जो L से अलग है। इसका मान L के मान पर निर्भर नहीं रहता। यह एक महत्वपूर्ण चरण है, और बच्चों को इसे समझने के लिए काफी समय व कई सारे उदाहरण दिए जाने चाहिए।

जब बच्चे एक सूत्र में दो स्वतंत्र चरों की बात के आदी हो जाएं, तब उनसे निम्नानुसार एक चार्ट बनाने को कहा जा सकता है। और फिर, जैसे वर्ग में किया था, इस मामले में भी हम उनकी मदद कर सकते हैं कि वे परिमाप व क्षेत्रफल के सूत्र पर पहुंचें।

लम्बाई	चौड़ाई	परिमाप	क्षेत्रफल
2	3	10	6
4	5	18	20
3	7	20	21
⋮	⋮	⋮	⋮
L	b	$2 \times (L + b)$	$L \times b$

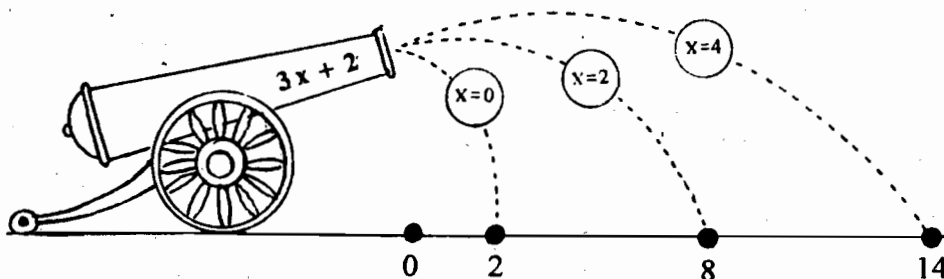
E8) क्या आप ऊपर सुझाए गए तरीके से सहमत हैं? यदि नहीं हैं, तो आप इसमें क्या बदलाव करना चाहेंगे?

सूत्रों का सम्बंध सिर्फ ज्यामिती से नहीं है। हम संख्याओं के सम्बंधों का भी व्यापकीकरण करके उन्हें सूत्रों के रूप में लिख सकते हैं। मसलन, आप बच्चों से कोई भी दो संख्याएं बताने को कहें, मान लीजिए 2 और 3 बताईं। फिर आप उनसे $2 + 3$ व $3 + 2$ के बीच सम्बंध देखने को कहिए। यही क्रिया आप संख्याओं की कई जोड़ियों के साथ कर सकते हैं। फिर आप उन्हें बीजगणितीय तरीके से यह दर्शाने की ओर ले जा सकते हैं कि किन्हीं दो संख्याओं का जोड़ उनके जोड़ने के क्रम पर निर्भर नहीं है यानी

$$a + b = b + a \text{ (जोड़ में क्रमविनिमेयता का सिद्धांत)}$$

अब आप उनसे कह सकते हैं कि a और b के अलग-अलग मान लेकर जांच करें कि यह सूत्र सही है या नहीं। मसलन, यदि $a = 11$ हो और $b = 13$ हो, या $a = 7$ हो और $b = 37$ हो, तब क्या यह सही होगा?

बीजगणितीय व्यंजकों में चरों की जगह संख्याओं को रखने के बारे में बच्चों की समझ और बेहतर बनाने के लिए आप 'तोप' का इस्तेमाल भी कर सकते हैं। मसलन, यदि आप उन्हें यह समझाना चाहते हैं कि सिर्फ x ही नहीं, बल्कि $3x + 2$ भी एक चर है, तो आप ' $3x + 2$ तोप' का इस्तेमाल कर सकते हैं (देखिए चित्र 3)। इस तोप में आप x का जो मान 'डालेंगे' उसी के अनुसार गोला $3x + 2$ दूरी तक पहुंचेगा। यानी यदि आप तोप में 5 डालते हैं तो गोला $3 \times 5 + 2 = 17$ की दूरी तक जाएगा।



चित्र 3 : बीजगणितीय व्यंजक के विशिष्ट मान ज्ञात करना

यहां उदाहरणों के जरिए बच्चों को एक बात स्पष्ट करना जरूरी है। यदि कोई नियम कई मानों के लिए सही है, तो भी जरूरी नहीं कि यह सभी मानों के लिए सही हो। यदि नियम एक भी मामले में ग़लत निकलता है, तो इस नियम को हम सही नहीं मान सकते।

अब एक अभ्यास।

E9) आप बच्चों को एक ऐसा सूत्र निकालने में कैसे मदद करेंगे, जो मिलीमीटरों और सेंटीमीटरों का सम्बंध दर्शाए?

आइए अब यह देखें कि हम बच्चों को समीकरणों से निपटने में मदद कैसे कर सकते हैं।

10.4.2 समीकरणों में इस्तेमाल

जब बच्चे यह समझ जाएं कि चर का अर्थ क्या है, तो उनका सम्पर्क ऐसी परिस्थितियों से कराया



चित्र 2 : क्या दूध में पानी मिलाना क्रम-विनिमेय क्रिया है?

' $\neq$ ', 'बराबर नहीं है' को दर्शाता है।

जा सकता है जिनमें उन्हें समीकरण हल करने की जरूरत हो। कक्षा 6 में पहुंचने तक, बच्चों को ' $=$ ' के इस्तेमाल का काफ़ी तजुर्बा हो चुका होता है। मसलन, वे यह जानते हैं कि $3 + 2 = 5$, वगैरह। आप उनसे इस तरह के खाली स्थान भरने को कह सकते हैं: $3 + \dots = 7$ या $3 + \dots \neq 5$, वगैरह। इन गतिविधियों के साथ-साथ आप उन्हें यह सोचने के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं कि कुछ मान तो उस कथन को सही साबित करते हैं जबकि कुछ और मान उसे ग़लत ठहराते हैं।

इसके बाद आप ऐसी गतिविधियों की ओर बढ़ सकते हैं। जिनमें चरों का इस्तेमाल करते हुए समीकरण बनानी होती हैं। मसलन, आप बच्ची के साथ 'संख्या सोचो' का खेल खेल सकते हैं। उससे कहिए कि एक संख्या सोचे, उसमें से 3 घटाए, उत्तर में 2 का गुणा करे और इसमें 8 जोड़ दे। अब बच्ची आपको बताए कि उसका उत्तर क्या आया। इसके आधार पर आप उसे बता सकते हैं कि उसने शुरू में क्या संख्या सोची थी। मसलन, यदि बच्ची का उत्तर 12 है, तो उसने 5 की संख्या सोची थी।

बच्ची आपके 'जादू' को देखकर शायद चकित रह जाएगी। अब आप उसे बता सकते हैं कि आपने यह कैसे किया। उसे नीचे दिए गए चार्ट के जरिए यह बात समझाई जा सकती है।

1. कोई संख्या सोचो



x

2. उसमें से 3 घटाओ



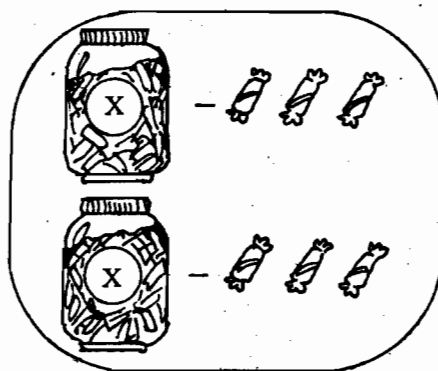
$x - 3$

3. उत्तर में दो का गुणा करो



$2(x - 3)$

4. उसमें 8 जोड़ो



$2 \times (x - 3) + 8$

$$2 \times (x - 3) + 8 = 12$$

आप उसे बता सकते हैं कि यह एक चर वाले समीकरण का उदाहरण है। यहां आप इस बात पर जोर दे सकते हैं कि ऐसा कोई भी व्यंजक जिसमें 'बराबर' का चिन्ह शामिल हो समीकरण होगा। मसलन, $3x + 5 = 7$, या $3 + 2 = 5$ या $2(x - 3) + 8 = 12$ । हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि समीकरण के एक पक्ष को 'रवाल' तथा दूसरे पक्ष को 'उत्तर' कहकर न पुकारें। ऐसा करने पर बच्ची के दिमाग में '=' चिन्ह के इस्तेमाल को लेकर गलतफहमी पैदा होती है।

एक और बात जिस पर हमें जोर देना चाहिए, वह यह है कि x के किसी भी मान के लिए, '=' के दोनों तरफ के मान बराबर होने चाहिए। आप बच्ची से कह सकते हैं कि जो समीकरण आपने लिखा है, उसमें वह x के अलग-अलग मान डालकर देख ले कि उनके लिए समीकरण सही है या नहीं। उदाहरण के लिए, वह $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 2$, वगैरह, आजमा सकती है। वह देख पाएगी कि यह समीकरण $x = 5$ के लिए ही सही है। x का कोई और मान, जैसे $x = 3$ लेने पर उसे $8 = 12$ मिलेगा, जो वह जानती है कि गलत है।

अब आप बच्ची को समीकरण सुलझाने में मदद करना शुरू कर सकते हैं। इस मुकाम पर उसे पहली बात यह सीखनी होगी कि वह समीकरण के एक पक्ष पर जो भी संक्रिया लागू करे, दूसरे पक्ष पर भी वही संक्रिया लागू करनी होगी। सिर्फ संख्याओं वाले समीकरणों का उपयोग करके आप उसे यह बात समझने में मदद दे पाएंगे। मसलन, यदि आप सिर्फ $3 + 2 = 5$ के एक पक्ष में 3 जोड़ देंगे तो समीकरण गलत हो जाएगा।

अब आप समीकरण सुलझाने की ओर बढ़ सकते हैं। शुरू में आप $x + 3 = 8$ जैसे समीकरण ले सकते हैं। उसे यह सोचना चाहिए कि $x + 3$ से x तक कैसे पहुंचे। आप उसे कुछ संकेत दे सकते हैं — जैसे, यदि दोनों तरफ से 1 घटा दें, तो क्या होगा? 3 घटा दें तो क्या होगा? वगैरह।

इसके बाद धीरे-धीरे $2 \times x = 6$, $2 \times x + 3 = 7$ और $2 \times (x - 3) + 8 = 12$ जैसे समीकरणों की ओर बढ़ा जा सकता है।

(ध्यान दें कि हम $2x$ की बजाय $2 \times x$ लिख रहे हैं। इसका कारण यह है कि बच्चे के दिमाग में भ्रम उत्पन्न न हो। इसलिए जरूरी है कि शुरूआती चरणों में गुणा का चिन्ह लिखा जाए। जब बच्ची चरों के साथ संक्रियाएं लागू करने की आदी हो जाए, तब $2 \times x$ तथा $2x$ दोनों का इस्तेमाल एक दूसरे के बदले कर सकते हैं, ताकि वह अच्छी तरह समझ जाए कि $2x$ का मतलब क्या है।)

जब आप समीकरण $2 \times (x - 3) + 8 = 12$ पर पहुंचें, जिसे आपने उसके साथ बनाया था, तब आप उसे बता सकते हैं कि इस समीकरण को हल करने के लिए उन सारे चरणों को उलटा देंगे जो इसे बनाने में इस्तेमाल की गई थीं। चूंकि, आखिरी चरण '8 जोड़ो' था, इसलिए अब वह $2 \times (x - 3) + 8 = 12$ के दोनों ओर से 8 घटा सकती है। इस प्रकार से उसे निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा :

$$2 \times (x - 3) = 4$$

इसके बाद वह दोनों ओर 2 से भाग दे सकती है; जिससे प्राप्त होगा

$$x - 3 = 2$$

आखिर में दोनों ओर 3 जोड़ने पर $x = 5$ मिलेगा, जो कि उत्तर है।

इस तरह की गतिविधि कई दिनों तक करनी होगी। इसके अलावा साल भर अभ्यास भी चलने चाहिए। इनमें ऐसे अभ्यास भी होने चाहिए जिनसे बच्चों को 'संख्या सोचो' के अपने खेल बनाने में प्रोत्साहन मिले।

E10) 'संख्या सोचो' का एक खेल किसी 10 वर्षीय (या उससे बड़े) बच्चे के साथ आजमाइए। यह ध्यान दीजिए कि जो समीकरण बने उसमें एक चर और कम से कम दो संक्रियाएं शामिल हों। आप बच्चे को इसे सुलझाने में मदद कैसे करेंगे?

इसके साथ ही हम बच्चों में बीजगणित का अहसास विकसित करने से सम्बंधित इस इकाई को समाप्त करते हैं। आइए संक्षेप में देख लें कि हमने इसमें क्या कुछ किया है।

10.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बातों पर चर्चा की।

- 1) बीजगणित से बच्चों का सम्पर्क संख्या-पैटर्न व अंकगणित के सम्बंधों के व्यापकीकरण के रूप में होता है।
- 2) बच्चे गणितीय दृष्टि से स्वीकार योग्य व्यापकीकरण करने की क्षमता किन तरीकों से हासिल कर सकते हैं।
- 3) बीजगणित सीखने से बच्चों को पैटर्न पहचानने, समूह की चीजों के सामान्य गुण खोजने और इन गुणों व सम्बंधों को आगे व्यापकीकृत करने में मदद मिलती है। इन सबको संक्षेप में और स्पष्ट ढंग से व्यक्त करने की क्षमता भी विकसित करने में सहायता मिलती है।
- 4) इस व्यापकीकरण को व्यक्त करने में जो अवधारणा मददगार होती है, वह है चर की अवधारणा।
- 5) बच्चों को चर का अर्थ समझाने के तरीके।
- 6) बच्चों को सूत्र विकसित करने तथा इस्तेमाल करने की क्षमता सीखने में मदद देने के तरीके।
- 7) बच्चों को समीकरण बनाने व हल करने की क्षमता सीखने में मदद देने के तरीके।

10.6 अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

E1) उदाहरण के लिए 'दिन के बाद रात आती है।'

E2) इसे बीजगणित के तरीके से करने के लिए हमें समीकरण बनाकर उन्हें हल करना होगा— यह ज्यादा आसान व तेज तरीका है। यदि बेटे की उम्र x वर्ष है तो पिता की उम्र $(x + 30)$ वर्ष होगी। इसलिए 10 वर्ष पहले उनकी उम्र क्रमशः $(x - 10)$ तथा $(x + 20)$ वर्ष थी। हमें पता है कि $(x + 20) = 4(x - 10)$
 यानी, $3x = 60$
 यानी, $x = 20$.
 अर्थात्, पिता इस समय 50 वर्ष के हैं।

E3) उदाहरण के लिए, इससे हर चरण के बारे में तार्किक ढंग से सोचने और उन चरणों के विकास को भी तर्कपूर्ण ढंग से समझने की क्षमता विकसित करने में मदद मिलती है। इससे बच्चे को गणित का स्वरूप महसूस करने में भी मदद मिलती है।

E4) अपने अनुभव से कोई उदाहरण दीजिए। (मसलन, क्या आपके सामने कभी यह बात आई कि बच्चे मानते हैं कि जिस आकृति का परिमाप ज्यादा होगा, उसका क्षेत्रफल भी ज्यादा होगा?) क्या आपने बच्ची को ऐसे उदाहरण दिए, जिससे उसे पता चले कि उसका व्यापकीकरण ग़लत है?

E5) i) $2x(3y + 6) = 2x \times 3y + 6$

ii) जब $x = 7$ और $y = 5$ हो तो, $4xy = 475$ होगा।

iii) $(x + 8)^2 = x^2 + 64$.

बच्चों से सम्पर्क के दौरान आपको ऐसे कई और उदाहरण मिलेंगे।

E6) हमारे ख्याल से कुछ खूबियां ये हैं : यह धीरे-धीरे विकसित होती है, अनौपचारिक है, सहज ज्ञान पर आधारित है, छात्रों के लिए रोचक है, और इससे जो समझ बनेगी वह लंबे समय तक टिकी रहेगी। इसकी एक खास खूबी यह है कि इसमें अवधारणा विकसित करने तथा समझ पर जोर दिया गया है, जो कि रटाने के तरीके का उल्टा है।

E7) इस सूत्र से संबंधित एक आम ग़लती यह होती है कि इसे $10c = m$ लिखने की बजाय $10m = c$ लिख दिया जाता है, जहां c व m क्रमशः सेंटीमीटरों व मिलीमीटरों की संख्या है।

इकाई 11 भाषा का विकास

इकाई की रूपरेखा	पृष्ठ संख्यां
11.1 परिचय	34
उद्देश्य	35
11.2 गणित समझाने में भाषा की भूमिका	35
11.3 इबारती सवाल	36
11.4 गणित की भाषा सीखना	40
11.5 सारांश	45
11.6 अभ्यासों पर टिप्पणियां	45

11.1 परिचय

यदि आप अपने किसी दोस्त से पूछें कि क्या गणित का और भाषा का सीखना ओपस में सम्बंधित हैं, तो वे शायद 'नहीं' कह दें। ऐसा इसलिए है क्योंकि उन्होंने यह नहीं देखा कि गणित का भाषा से तीन अलग-अलग स्तरों पर सम्बंध है:

- 1) **समझाने की भाषा:** जब शिक्षक कक्षा में गणित (यानी गणित की अवधारणाएं, सूत्र, संक्रियाएं, प्रक्रियाएं, प्रमेय, वगैरह) समझाती हैं, तो वे आम भाषा का इस्तेमाल करती हैं। वास्तव में, बच्चे जो कोई भी गणितीय अवधारणाएं सीखते हैं, वे उनके सामने आम भाषा के माध्यम से आती हैं।

हम इस पहलू की चर्चा भाग 11.2 में करेंगे।

- 2) **सवाल हल करने की भाषा :** हमारा गणित सीखने का प्रमुख लक्ष्य है यह क्षमता विकसित करना कि हम रोजमर्रा की समस्याओं को गणितीय सवाल के रूप में तब्दील कर सकें, इन्हें ज्ञात तकनीकों के जरिए हल करें, और फिर उन उत्तरों को वास्तविक जीवन की समस्या के अर्थपूर्ण हल में रूपांतरित करें। बच्चे इस क्षमता को उपयुक्त इबारती सवाल को करते हुए विकसित करते हैं। यहां फिर भाषा की बात आती है।

इस पहलू से जुड़ी दिक्कतों की चर्चा भाग 11.3 में करेंगे।

- 3) **गणित बतौर एक भाषा :** गणित खुद भी एक भाषा है। इसके अपने प्रतीक, शब्द और व्याकरण के नियम हैं। यह कुछ सुसंगत पूर्वधारणाओं (assumptions) पर आधारित है, और उस पर तर्क के कुछ नियमों के मुताबिक निर्मित हुआ है। गणितीय सोच के विकास के लिए इस तर्क को समझना व उपयोग करना जरूरी है, और यह क्षमता आम भाषा के विकास पर निर्भर है। मसलन, 'और', 'लेकिन', 'इसलिए', 'या' जैसे समुच्चयबोधक शब्दों के उपयोग की क्षमता हासिल करने के बाद ही बच्चे गणितीय तर्क के ऐसे वाक्य समझ पाएंगे : "प्रत्येक वर्ग एक आयत होता है, लेकिन प्रत्येक आयत वर्ग नहीं होता।"

दो भाषाओं के बीच पारस्परिक क्रिया का एक पहलू यह भी है कि दोनों में कुछ सामान्य शब्दों का उपयोग होता है। गणित में आम भाषा के कुछ शब्दों का भी उपयोग होता है, मगर एक निश्चित गणितीय अर्थ के साथ। मसलन, अन्तर, जोड़, भाग, घात, वगैरह। ये



चित्र 1

हम इन पहलुओं पर भाग 11.4 में गहराई से विचार करेंगे।

गणित और भाषा के संबंध के विभिन्न पहलुओं की चर्चा करते हुए हम आमतौर पर संख्याओं से सम्बंधित उदाहरणों का ही उपयोग करेंगे। लेकिन इनका परस्पर सम्बंध गणित के किसी भी क्षेत्र में देखा जा सकता है। अतः आगे के खंडों को पढ़ते हुए यह ध्यान दें कि ऐसा कहाँ-कहाँ होता है। ऐसे अवलोकनों से आपको इस इकाई के उद्देश्यों को हासिल करने में मदद मिलेगी।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- गणित सीखने में आम भाषा की भूमिका समझा पाएंगे;
- बच्चों को इबारती सवालों में आने वाली दिक्कतों का वर्णन कर पाएंगे, और सुधार के लिए तरीके विकसित कर पाएंगे;
- यह समझा पाएंगे कि गणित की भाषा क्या होती है;
- बच्चों को गणित की भाषा सीखने में मदद देने के तरीके विकसित कर पाएंगे;
- अपने शिक्षण के तरीकों का मूल्यांकन कर पाएंगे।

11.2 गणित समझाने में भाषा की भूमिका

मान लीजिए आप किसी बच्ची को '3' की अवधारणा हासिल करने में मदद कर रहे हैं। आप यह कैसे करेंगे? यही ना, कि उसे 3-3 वस्तुओं के विभिन्न समूहों (जैसे पेंसिले, किताबें, बच्चे, पेड़, वगैरह) में मौजूद '3-पन' को समझने में मदद देंगे? बच्ची को इस तरह की अमूर्त अवधारणाओं तथा उनसे सम्बंधित शब्दों के लिए तैयार करने के लिए हम ठोस चीजों, चित्रों, आदि का इस्तेमाल करते हैं। साथ-ही-साथ हम उसे हर बात आम भाषा में समझाते हैं।

इसी तरह, गणित की कोई भी बात समझाने के लिए, हमें बच्ची की पहली भाषा का, या जो भी भाषा वह समझती हो उसका, सहारा लेना होता है। इसके अलावा आम भाषा का उपयोग भी उस स्तर पर करना होता है, जो बच्ची को समझ में आए। बदकिस्मती से कई शिक्षक और पाठ्यपुस्तक लेखक इस पहलू पर कोई विचार नहीं करते। यह एक प्रमुख कारण है जिसकी वजह से लोग सोचते हैं कि "गणित कठिन है"।

प्राइमरी स्कूल के बच्चों के लिए लिखी गई गणित की किसी भी पाठ्यपुस्तक पर नज़र डालिए। क्या आपको लगता है कि जिस भाषा में अवधारणाएं व प्रक्रियाएं समझाई गई हैं, उसे बच्चे समझ पाएंगे? मिसाल के तौर पर, 6 वर्षीय बच्चों के लिए लिखी गई कक्षा 2 की किताब में माचिस के बक्स, मोटी किताब, अलमारी और संदूक की तस्वीरें दिखाकर कह देते हैं कि: यहां पर दी हर वस्तु घनाभ के आकार की है। इसलिए इन्हें घनाभाकार वस्तु कहते हैं। इसी तरह से बच्चों का परिचय गोलाकार, शंक्वाकार और रंभाकार वस्तुओं (और नए शब्दों) से किया जाता है।

6 या 7 वर्ष के कितने बच्चे इसे समझ सकेंगे? जब वे इसे नहीं समझ पाते, तो वे किस ढंग की ग़लतफ़हमियां पाल लेते होंगे? इन्हीं अवधारणाओं को समझाने का बेहतर तरीक़ा यह होगा कि उन शब्दों का उपयोग किया जाए जो बच्चों के जाने-पहचाने हों, तथा साथ में शरीर के हावभाव और इशारों का इस्तेमाल किया जाए। यदि घनाभ जैसे शब्द बच्चों के भाषा विकास स्तर से मेल नहीं खाते, तो इन्हें फ़िलहाल छोड़ दिया जाना चाहिए।

इसके अलावा, हमें छोटे बच्चों को 'घनाभाकार', 'तिकोन', आदि जैसी गणितीय अवधारणाओं की लम्बी और उलझी हुई व्याख्याएं व परिभाषाएं देने से भी बचना चाहिए। इस स्तर पर इतना ही काफी होगा कि बच्चे उदाहरण देकर बता सकें कि कौन सी वस्तु घनाभ है और कौन सी नहीं है।

यदि हम शुरू से ही इन पहलुओं का ख़्याल नहीं करेंगे, तो बच्चों को आगे की अवधारणाएं व प्रक्रियाएं कभी स्पष्ट न हो सकेंगी। वे गणित की भाषा को लेकर कभी सहज न हो पाएंगे। हर मोड़ पर वे ऐसे संकेतों या सुरागों की तलाश में रहेंगे जिनकी मदद से परिभाषा या सूत्र को कम से कम याद तो रख सकें। और फिर जैसे ही किसी ज़रा भी अपरिचित सवाल से पाला पड़ेगा तो ये बच्चे तरह-तरह की ग़लतियां करेंगे, जिनमें से कुछ का ज़िक्र हमने पहले की इकाइयों में किया है।

और अब, हमने जो कुछ कहा है उसके बारे में एक अभ्यास।

E1) आप जिस बच्चे को पढ़ा रहे हैं, उसकी गणित पाठ्यपुस्तक के किसी अध्याय का भाषा की दृष्टि से विश्लेषण कीजिए। हमने ऊपर जो कुछ कहा, उसके मद्दे नज़र आप उस अध्याय के हिस्सों को नए सिरे से किन शब्दों में लिखेंगे?

आइए अब देखते हैं कि किसी गणितीय संदर्भ में इस्तेमाल की गई भाषा को न समझ पाने की वजह से किस तरह की समस्याएं उत्पन्न होती हैं।

11.3 इबारती सवाल

जैसा कि आप पिछली इकाइयों में पढ़ चुके हैं, हमें सही तरह के इबारती सवालों के द्वारा बच्चों को गणितीय अवधारणाओं व प्रक्रियाओं से परिचित कराने की ज़रूरत है। इन सवालों से उन्हें ऐसे संदर्भ मिलते हैं जो उन्हें प्रोत्साहित करें। अलबत्ता, बच्चों को इबारती सवाल देते समय ध्यान रखना चाहिए कि सवाल सरल शब्दों में हों तथा बच्चों के रोज़मर्रा के अनुभवों से जुड़ें हों।

इबारती सवालों को हल करने में बच्चे को सबसे पहले तो यह समझना होता है कि सवाल में कहा क्या गया है। इसके बाद उसे इस सवाल को वास्तविक जीवन के संदर्भ से उपयुक्त गणितीय रूप में तब्दील करना होता है, और इसे प्रतीकों में लिखना होता है। फिर इस गणितीय सवाल को हल करने के लिए उपयुक्त गणितीय प्रक्रिया चुनना व उसे इस्तेमाल करना होता है। और अंत में उत्तर को वापिस उस वास्तविक जीवन के संदर्भ में रखकर समझना होता है, जहां से शुरू किया था।

यानी, किसी शाब्दिक सवाल को हल करने के चरण निम्नानुसार हैं:

भाषा का विकास

1. वास्तविक जीवन के सवाल को समझना
2. इसे गणितीय कथनों में तब्दील करना
3. तुल्य गणितीय सवाल की रचना करना
4. गणितीय सवाल को हल करना
5. चरण 1 के संदर्भ में इस उत्तर को समझना।

बदकिस्मती से अधिकांश बच्चों का शुरू से इबारती सवालों से सामना नहीं होता। अधिकांश शिक्षक व पाठ्यपुस्तकें अवधारणाएं समझाने के लिए सीधे अमूर्त संख्या-सवालों पर चले जाते हैं या फिर शब्दहीन चित्रों का उपयोग करते हैं। इबारती सवालों पर तो वे साल के अन्त में आते हैं। इसका नतीजा यह है कि बच्चों को ऐसे सवालों को हल करने में बहुत कठिनाई होती है।

मसलन, एक दिन एक शिक्षक ने हमें बताया कि वे जब भी बच्चों को चार संक्रियाओं में से किसी से भी सम्बंधित इबारती सवाल देते हैं तो कक्षा में फुसफुसाहट शुरू हो जाती है और डर का माहौल बन जाता है। “और कभी-कभी तो”, उसने बताया, “यदि आप गुणा और भाग सिखाने के तुरंत बाद बच्चों को इबारती सवाल दे दें तो बड़ा दिलचस्प असर दिखाई देता है। उन्हें यह पता है कि सवाल का सम्बंध जरूर उस बात से है जो अभी-अभी सिखाई गई है। यानी या तो गुणा होगा या भाग। फिर वे पूछते हैं, “सर, गुणा करें या भाग?”।”

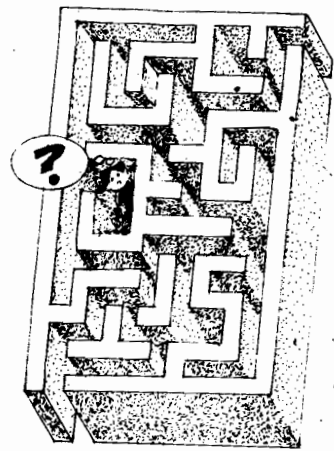
यदि आप कक्षा 4 या 5 के बच्चों के साथ काम करते हैं, तो आपने अक्सर देखा होगा कि इबारती सवालों से सामना होते ही उनके हाथ-पांव फूल जाते हैं। इसे समझने के लिए 10 या 11 वर्षीय बच्चों के किसी भी समूह को देखिए जिन्हें चार गणितीय संक्रियाओं से सम्बंधित कुछ सीधे कथन वाले सवाल (यानी जिनमें सिर्फ संख्याओं और प्रतीकों का इस्तेमाल किया गया हो) और कुछ इबारती सवाल दिए गए हैं। आपको कुछ सामान्य पैटर्न नज़र आएंगे। बच्चे पहले उन सवालों को करते हैं जो सही एल्गोरिद्म की शैली में लिखे हों। इसके बाद वे आपस में कानाफूसी करने लगते हैं। और फिर अधिकतर बच्चे बाकी के सवाल बिना हल किए छोड़ देते हैं।

जो थोड़े से बच्चे इबारती सवाल करने की कोशिश करते हैं, वे थोड़ा हिचकिचाते हुए शुरू करते हैं। डर और आत्मविश्वास की कमी साफ़ नज़र आती है। (इसके विपरीत सीधे-सीधे अंकों व सूत्रों के रूप में प्रस्तुत सवाल करते वक्त वे काफ़ी आश्वस्त नज़र आते हैं।) वे कई अटकलें आजमाते हैं। इनमें से कुछ बच्चे ज्यादातर कुछ संख्याओं को जोड़कर शुरू करते हैं। इसके बाद वे आसपास के बच्चों की कॉपियों में झांकते हैं कि उन्होंने वही किया है या नहीं।

कुछ बच्चे सवाल के शब्दों में ऐसा कोई सुराग़ ढूँढने की कोशिश करते हैं जिससे उन्हें पता चल जाए कि कौन सी संक्रिया करनी है। शायद उनका तर्क कुछ इस तरह चलता है : “यदि ‘भाग’ या ‘बांटो’ शब्द दिखे, तो सवाल भाग का है। यदि सवाल में कहीं ‘कुल संख्या’ लिखा हो, तो सवाल जोड़ का हो सकता है। यदि उसमें कहीं ‘कितने और’ या ‘कितने बचे’ लिखा है, तो सवाल घटाने का है। और यदि ‘गुना’ या ‘दर’ शब्द दिखाई पड़ जाए, तो पूरी संभावना है कि सवाल गुणा का है।”

कई बार वे सवाल में दी गई संख्याओं में भी सुराग़ की तलाश करते हैं। इस मामले में, ऐसा लगता है कि उनका तर्क इस प्रकार का होता है: “यदि संख्याएं छोटी हैं, तो शायद उनका गुणा करना हो; यदि एक संख्या बड़ी है और दूसरी छोटी है, तो भाग आजमा लो; यदि भाग देने पर कुछ शेष बच जाए तो हमने ग़लती कर दी, इसलिए कोई और संक्रिया लागू करनी चाहिए।”

बच्चे ऐसे कई संकेतों का इस्तेमाल करते हैं, ताकि किसी तरह यह पता लग जाए कि कौन सी संक्रिया लागू करनी है और किन संख्याओं पर लागू करनी है। बच्चों को ऐसे संकेतों का सहारा क्यों लेना पड़ता है?



चित्र 2 : बच्चों के लिए इबारती सवाल भूल भुलैया होते हैं।

जिसे हम सीखना मानते हैं उस पर हमारा जोर ही शायद इबारती सवालों के साथ बच्चों के ऐसे व्यवहार का कारण है। हममें से कई लोगों के हिसाब से अंकगणित सीखने का मुख्य उद्देश्य है संक्रियाओं को सही-सही व तेजी से कर पाना। पाठ्यपुस्तकों व पाठ्यक्रम का दबाव भी मांग करता है कि शिक्षक बच्चों को बड़ी से बड़ी संख्याओं तथा मुश्किल से मुश्किल सूत्रों व नियमों की ओर धकेलें। और यह सब करते हुए बच्चों को इस बात के लिए समय ही नहीं दिया जाता कि वे इस सबमें निहित गणित के बारे में सोच सकें, उसे समझकर ग्रहण कर सकें।

स्थिति तब और भी पेचीदा हो जाती है जब हममें से कई लोग बच्चों को अटकल लगाने के ऐसे कारगर तरीके सिखा देते हैं जिनसे पता चल सके कि कौन सी संक्रिया करनी है (बगैर समझे!)। हम उन्हें शॉर्टकट और ऐल्गोरिद्म सिखा देते हैं। इन तरीकों से जाने-पहचाने सवालों के अपेक्षित उत्तर निकालने में तो जरूर मदद मिलती है। लेकिन बच्चे समझ नहीं पाते कि हो क्या रहा है, और क्यों। और नतीजा यह होता है कि अगर उसी सवाल की भाषा में भी थोड़ा फेरबदल कर दिया जाए, तो उनकी मुश्किल और बढ़ जाती है।

खेद की बात है कि हम ठोस चीजों व परिचित संदर्भों में बच्चों को इन संक्रियाओं का अभ्यास कराने के लिए जरूरत के मुताबिक समय नहीं लगाना चाहते। हम उन्हें ऐसे सवाल हल करने के काफ़ी मौके नहीं देते जिनमें संख्याएं छोटी-छोटी हों और जिन्हें करने के लिए ऐल्गोरिद्म का उपयोग भी न करना पड़े। (उदाहरण के लिए, 'ऐन्ना के पास 7 कंचे थे। उसने 3 कंचे अपने दोस्त अजीत को दे दिए। ऐन्ना के पास कितने कंचे बचे?' जैसे सवाल।) जैसा कि आप पिछली इकाइयों में देख चुके हैं, ऐसे सवाल कर पाने के लिए इस तरह के अभ्यास बहुत जरूरी हैं। एक ही संक्रिया पर आधारित सरल सवालों से शुरू करके उन्हें धीरे-धीरे ऐसे इबारती सवाल दिए जा सकते हैं जिनमें कई चरण हों। इस तरह से वे ऐसे मुश्किल सवाल भी कर पाएंगे: "अशोक की मां ने उसे 50 रुपए दिए। उसने 10 रुपए दर्जन के भाव से 2 दर्जन संतरे तथा 6 रुपए किलो के भाव से 3 किलो आलू खरीदे। कितने रुपए वापिस लेकर आएगा?"

और अब क्यों न आप एक अभ्यास कर डालें?

E2) ऐसे अन्य कारण बताइए जिनकी वजह से बच्चे इबारती सवालों के प्रति सहज नहीं हो पाते।

E2 का जवाब देते हुए शायद आपने बताया होगा कि जब बच्चों को वास्तविक जीवन के संदर्भ में बनाए गए सवाल दिए जाते हैं, तो उनकी एक प्रमुख दिक्कत यह होती है कि उत्तर को संदर्भ में रखकर कैसे समझें। अधिकांश मामलों में होता यह है कि उत्तर के रूप में जो संख्याएं आती हैं वे एक ऐसी प्रक्रिया के माध्यम से आती हैं, जिसे बच्चे समझते नहीं। इसलिए अक्सर बच्चे इन संख्याओं का सम्बंध वास्तविक जीवन की स्थिति से नहीं जोड़ पाते। नतीजा यह होता है कि वे बेतुके उत्तर निकाल लाते हैं।

मिसाल के तौर पर, आठ 10 वर्षीय बच्चों को यह सवाल दिया गया: '149 बच्चों को जीप से घर जाना है। एक बार में एक जीप अधिक से अधिक 12 बच्चों को ले जा सकती है। जीप को कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे?' इसका उत्तर निकालने के लिए बच्चों ने 149 को 12 से भाग दिया।

एक को छोड़ कर, बाक़ी सभी का उत्तर था, "12 चक्कर लगेंगे, और पांच बच्चे बच जाएंगे।" सिर्फ़ एक बच्ची ने उत्तर दिया था, "13 चक्कर।" जब उससे पूछा गया कि ऐसा क्यों, तो उसने कहा कि जो पांच बच्चे बचेंगे उनके लिए एक और चक्कर लगाना पड़ेगा।

जब यही सवाल थोड़े बड़े बच्चों से पूछा गया, तो उनका उत्तर 12.4 आया। जब उनसे इस संदर्भ में इस उत्तर को समझाने को कहा गया, तो उनमें से कुछ बच्चों ने इसको नज़दीकी पूर्ण संख्या में बदलते हुए 12 बता दिया क्योंकि उनका कहना था कि "0.4 तो 0.5 से कम है।" अर्थात् उनके हिसाब से 149 बच्चों के लिए तो जीप के 12 चक्कर लगेंगे, जबकि 151 बच्चों के लिए 13 चक्कर लगाने पड़ेंगे (क्योंकि 12.6 की नज़दीकी पूर्ण संख्या 13 होगी)।

E3) भाग का कोई ऐसा सवाल बनाइए जो आपके आसपास के 10-11 वर्षीय बच्चों के वास्तविक जीवन से जुड़ा हो। कुछ 10 या 11-वर्षीय बच्चों को यह सवाल दीजिए और उनके उत्तरों को नोट कीजिए। उनके उत्तर किस हद तक सही रहे?

जैसा कि आपने देखा, इबारती सवालों के संदर्भ में बच्चों को कई स्तरों पर दिक्कत आती है। मुख्य बाधा यह लगती है कि वे वास्तविक जीवन की किसी स्थिति को गणितीय रूप में प्रकट नहीं कर पाते और किसी गणितीय कथन का अर्थ वास्तविक जीवन की स्थिति में नहीं समझ पाते। ऐसा कर पाने के लिए ज़रूरी है कि बच्चे सवालों की आम भाषा को सार्थक ढंग से गणित के प्रतीकों व जुमलों से जोड़ पाएं। इस सम्बंध को जोड़ने के लिए किसी सहायक की आवश्यकता हो सकती है। सवालों को ठोस चीज़ों के ज़रिए या चित्रात्मक रूप से प्रस्तुत करना तथा साथ में समझाने वाले हावभाव और इशारों का उपयोग, इस सहायक की भूमिका निभा सकते हैं। मसलन, यदि सवाल यह है कि '5-5 पत्थरों के दो समूहों को मिलाने पर कुल कितने पत्थर होंगे?', तो बच्चे सचमुच के पत्थरों का उपयोग करके उत्तर निकाल सकते हैं।

इबारती सवालों से निपटने में बच्चों की मदद के लिए एक और तरीका होमी, एक शिक्षक-प्रशिक्षक ने सुझाया है।

उदाहरण 1 : होमी ने कक्षा 4 व उससे ऊपर की कक्षा के बच्चों को इबारती सवालों के संदर्भ में मदद देने के कई तरीके आजमाए हैं। उसने पाया है कि इस मामले में एक कारगर तरीका यह हो सकता है कि बच्चों के साथ मिलकर इबारती सवाल बनाए जाएं। मसलन, होमी उनसे पूछता है, "मुन्नी 5 साल की है और उसकी मां 29 साल की है। तुम उन दोनों की उम्रों का सम्बंध कैसे जोड़ोगे?" एक बच्ची $29 - 5 = 24$ कहेगी, तो दूसरी कह सकती है कि $6 \times 5 = 29 + 1$, वगैरह। फिर होमी इनमें से कोई एक सम्बंध, जैसे $29 - 5 = 24$, लेकर बच्चों से कहेगा कि इससे मेल खाता एक इबारती सवाल बनाएं। यहां होमी बच्चों को इस तरह के संकेत देता है कि "सवाल में 29 क्या था?", "उसमें 5 क्या था?", वगैरह। कुछ समय बाद होमी और बच्चे मिलकर निम्नलिखित कथन पर पहुंच जाते हैं,

मां की उम्र - मुन्नी की उम्र = 24 वर्ष।

इसके बाद होमी उन्हें यही क्रिया $6 \times 5 = 29 + 1$ या किसी अन्य सम्बंध के बारे में करने को प्रेरित करता है।

मान लीजिए कि वे निम्नलिखित कथन बना लेते हैं;

$$6 \times \text{मुन्नी की उम्र} = \text{मां की उम्र} + 1 \text{ वर्ष}$$

अब होमी उनसे कहता है कि वे इससे जुड़ा कोई इबारती सवाल बनाएं। होमी का कहना है कि थोड़ी मदद के बाद बच्चे इस तरह के सवाल बना लेते हैं : "मुन्नी की मां की उम्र 29 साल है। एक साल बाद उसकी उम्र मुन्नी की वर्तमान उम्र से छः गुना ज्यादा होगी। तो बताओ मुन्नी की उम्र क्या है?" फिर होमी और बच्चे मिलकर अपने बनाए इस सवाल को हल करते हैं। इसके लिये वे उन सारे चरणों को उलट देते हैं जिनसे उन्होंने सवाल बनाया।

होमी के मुताबिक बच्चों को इस शिक्षण प्रक्रिया में बहुत मज़ा आता है। इससे उन्हें इबारती सवालों को हल करने के विभिन्न चरणों को समझने में भी मदद मिलती है।

- E4) "इबारती सवालों को हल करने को लेकर बच्चों की उलझन की एक खास वजह यह है कि एक ही गणितीय कथन कई अलग-अलग तरह के इबारती सवालों को दर्शाते हैं।" $4 + 3 = 7$ का उदाहरण लेकर इस कथन की व्याख्या कीजिए।

चलिए अब उस तीसरे स्तर पर विचार करें, जिसका जिक्र हमने परिचय में किया था।

11.4 गणित की भाषा सीखना

गणित की भाषा है क्या? किसी भी अन्य भाषा की तरह यह भी ऐसी अवधारणाओं, शब्दों, प्रतीकों, ऐल्गोरिद्मों और व्याकरण से मिलकर बनी है, जो खास इसी के लिए बने हैं। बच्चे इस भाषा को तभी सीख सकते हैं जब वे इसका इस्तेमाल करें, यानी इसे बोलें, इसे लिखें, इसे सुनें। पिछली सारी इकाइयों में हमने बच्चों के साथ गणित की बातचीत करने, जो कुछ वे कर रहे हैं उसके बारे में उन्हें बताने को प्रेरित करने और गणित की चर्चा के जरिए उनकी समझ को आगे बढ़ाने के महत्त्व पर जोर दिया है। इसी तरह की कोशिशें उनकी समझ को आकार देती हैं, उनकी गणितीय भाषा व सोच को बेहतर बनाती हैं।

हां, यह जरूर है कि जब छोटे बच्चे यह बताने की कोशिश करते हैं कि वे क्या कर रहे हैं, तो जरूरी नहीं कि उनकी बात सुसंगत या तर्कपूर्ण हो। ऐसा इसलिए है क्योंकि सही ढंग से बताने के लिए बच्ची को इस बात पर गौर करना होगा कि उसने क्या किया। और इसके लिए ऊंचे स्तर की सोच की जरूरत है। बहरहाल यह जरूरी है कि बच्ची ज्यादा गौर करना शुरू करे। ऐसा करते हुए उसे मौका मिलेगा कि वह क्रिया में शामिल विभिन्न गणितीय प्रक्रियाओं को साथ-साथ रखने की, उन्हें व्यवस्थित करने तथा शब्दों में व्यक्त करने की क्षमता का विकास कर पाए। गणित की उसकी समझ तथा गणित के प्रति उसका लगाव विकसित करने में इसका दूरगामी प्रभाव होता है।

बदकिस्मती से अधिकांश शिक्षक अपने छात्रों से वैसी बातचीत करने की कोशिश नहीं करते जैसा कि हमने सुझाया है। उदाहरण के तौर पर कक्षा 1 के पाठ्यक्रम में 1 से 9 तक की संख्याओं व अंकों की अवधारणा सिखाने के लिए 30 घण्टे का समय निर्धारित किया गया है। और आम कक्षा में यह शिक्षण कैसे किया जाता है? शिक्षक कक्षा में उपलब्ध कोई भी चीज — जैसे झोला, छाता, पेन — उठाकर कह देती है कि यह 'एक' है। फिर वह ब्लैकबोर्ड पर अंक 1 लिख देती है, जिसे छात्र बिना सोचे-समझे अपना काम समझकर कॉपी पर उतार लेते हैं। यह सब दो-तीन मिनट में पूरा हो जाता है, और शिक्षक संतुष्ट हो जाती है कि उसने 'एक' की अवधारणा बच्चों को सिखा दी है। इसी तरह से वह उन्हें विभिन्न संख्याओं के नाम और प्रतीक बता देती है और उम्मीद करती है कि वे इस पूरी नई बोली व लिखित भाषा को आत्मसात् कर लेंगे। शिक्षक को जब यह बताया जाता है कि बच्चे शब्दों के इस 'विस्फोट' से चक्कर में पड़ सकते हैं, तो उसे बहुत आश्चर्य होता है।

किसी तरह से बच्चे, आसपास के वयस्कों की मदद से, पढ़ाने के इस तरीके से जूझने में सफल हो जाते हैं। (यह और बात है कि कई बच्चों को, खासकर गांवों के बच्चों को मदद के लिए ऐसे वयस्क नहीं मिल पाते।) इसकी वजह से बच्चे गणितीय अवधारणाओं, प्रक्रियाओं व कौशलों को लेकर कई गलत धारणाएं पाल लेते हैं। इसकी एक उम्दा मिसाल है गणितीय संक्रियाओं को लागू करने के ऐल्गोरिद्मों की उनकी समझ (या समझ का अभाव)।

काफ़ी सारे बच्चे गणना प्रक्रियाओं को सही-सही निपटा लेते हैं हालांकि वे इसमें निहित गणित

को नहीं समझ पाते। बतौर उदाहरण, जब हमने मध्यप्रदेश के कुछ स्कूलों में कक्षा 7 के बच्चों से बातचीत की, तो देखा कि अधिकांश बच्चे 5 अंकों वाली संख्यांक सही-सही नहीं पढ़ पाए। अलबत्ता उनमें से कई बच्चे 4 या 5 अंकों के संख्यांकों का गुणा सही कर लेते थे।

किसी ऐल्गोरिद्म का आधार न समझ पाने का कारण अक्सर यह होता है कि बच्चों को इस बात की काफ़ी समझ नहीं होती कि हम संख्यांकों को एक विशेष ढंग से ही क्यों लिखते हैं। इसके चलते बच्चे जिस तरह की ग़लतियां करते हैं, उसकी एक मिसाल देखिए:

जब जमुना से 20 और 1 को नियमानुसार जोड़ने को कहा गया तो उसने लिखा $\frac{20}{30} + 1$ लेकिन मौखिक (अनौपचारिक) रूप से करने पर उसका उत्तर 21 आया।

यानी कई बच्चे यह जानते हैं कि इकाई, दहाई और सैकड़ा क्या होते हैं और यह भी जानते हैं कि किसी संख्या में इकाई, दहाई या सैकड़ा को जोड़ने का अर्थ क्या है, मगर वे इसका सम्बंध लिखित ऐल्गोरिद्म के साथ नहीं जोड़ पाते। वे ऐल्गोरिद्म में दिए गए चरणों व प्रक्रियाओं को नहीं समझ पाते। यही बात निम्नलिखित उदाहरण में भी नज़र आती है।

14 वर्षीय अजय को 312-47 हल करने को कहा गया। उसने लिखा;

$$\begin{array}{r} 3 \quad 1 \quad 2 \\ - 10 \quad 54 \quad 7 \\ \hline 2 \quad 6 \quad 5 \end{array}$$

जब उससे पूछा गया कि उसने 4 काटकर 5 क्यों लिखा, तो उसने बताया, "2 तो 7 से छोटा है। इसलिए मैं एक उधार लेता हूँ। फिर मुझे नीचे एक वापिस करना है।" उससे फिर पूछा गया, "लेकिन तुमने यह एक नीचे क्यों जोड़ा?" उसने सफ़ाई देते हुए कहा, "लेकिन यह ग़लत नहीं है। अगर मैं 265 और 47 को जोड़ूँगा, तो 312 आएगा।"

ज़ाहिर है कि इस बच्चे को तरीका लागू करना आता है, और वह यह भी जानता है कि इस संक्रिया का अर्थ क्या है। लेकिन वह इन दोनों बातों का संबंध नहीं जोड़ पा रहा है।

और अब इस चर्चा से संबंधित एक अभ्यास कीजिए।

E5) बच्चे द्वारा किसी ऐल्गोरिद्म का उपयोग कर पाना और उसमें निहित अवधारणाओं व प्रक्रियाओं को समझा सकना, इन दोनों के बीच, आपके अनुसार, क्या सम्बंध है? यदि कोई बच्ची यह नहीं समझ पाती कि कोई ऐल्गोरिद्म कैसे काम करता है, तो आप इस स्थिति को कैसे संभालेंगे?

बच्चों को किसी गणितीय अवधारणा से सम्बंधित विभिन्न शब्द समझने में मदद देने के लिए हम रोचक कहानियों का सहारा ले सकते हैं। (ऐसी कहानियों के उदाहरण इकाई 9 व अन्य इकाइयों में हैं।) लेकिन बच्चों के लिए अमूर्त अवधारणाएं बिना संदर्भ के सीखना मुश्किल होता है। निम्नलिखित उदाहरण से यही बात स्पष्ट होती है।

अपने स्कूल में 4 वर्षीय शीला का सम्पर्क संख्याओं व ठोस चीज़ों के साथ छोटी संख्याओं के जोड़ से हो चुका था। एक दिन शिक्षक ने उससे पूछा, "दो और एक कितने हुए?" शीला जवाब न दे सकी। थोड़ी देर रुककर शिक्षक ने बातचीत जारी रखी।

शिक्षक : दो पत्थर और एक पत्थर मिलाकर कितने पत्थर हुए?

शीला : तीन पत्थर।

शिक्षक : तो दो और एक कितने हुए?

शीला (हिचकिचाते हुए, सवालिया ढंग से) : चार?

शिक्षक : एक पत्थर, और एक और पत्थर कितने पत्थर?

शीला : दो पत्थर।

शिक्षक : तो एक और एक कितने?

शीला : एक, शायद।

शीला के लिए पत्थर वाले प्रश्न और संख्या वाले अमूर्त सवाल का कोई संबंध नहीं है। शायद वह यह सोच रही हो, "इसका उत्तर तो मुझे पता नहीं। मगर इसका उत्तर जरूर पत्थर वाले सवाल से अलग होगा।"

यह उदाहरण दर्शाता है कि बच्चों को उनके अनुभवों से ज्यादा व्यापक स्थितियों तक पहुंचने में मदद करना थोड़ा पेचीदा काम है। उन्हें विशिष्ट संदर्भ में इस्तेमाल होने वाली भाषा और उसमें मौजूद तर्क को समझना होगा।

जब एक बार कोई बच्ची गणित की भाषा से थोड़ा-बहुत परिचित हो जाती है, तो वह इस स्थिति में होती है कि इस भाषा की शक्ति को संप्रेषण के ऐसे साधन के रूप में महसूस कर सके जो संक्षिप्त है और स्पष्ट है। जब वह इस भाषा का उपयोग करने लगेगी, तो वह यह भी देख पाएगी कि यह भाषा संक्षिप्तता, स्पष्टता और व्याकरण के लिहाज से कैसे उसकी रोजमर्रा की भाषा से अलग है। इसी अन्तर को देखकर प्रसिद्ध जर्मन दार्शनिक गड्थे (Goethe) ने कहा था, "गणितज्ञ एक तरह से फ्रांसिसी हैं। जब भी आप उनसे कोई बात कहते हैं, तो वे इसका तर्जुमा अपनी भाषा में कर लेते हैं; और तुरन्त उस बात का मतलब कुछ और ही हो जाता है।"

विभिन्न प्रतीक सीखते वक्त बच्चों को तरह-तरह की दिक्कतें आ सकती हैं, जैसे:

- i) 32 और $3/2$, या $2x$ और x^2 जैसे व्यंजकों के बीच फ़र्क न कर पाना।
- ii) शब्दों में '=' व्यक्त करने के अलग-अलग तरीके। जैसे, $8-2=6$ को पढ़ा जाता है 'आठ में से दो गए तो छः बचे' और $6+2=8$ को पढ़ा जाएगा 'छः में दो जोड़े तो हुए आठ'।
- iii) एक ही गणितीय तथ्य को कई तरह से प्रस्तुत किया जा सकता है। मसलन, $8-2=6$ को $6+2=8$ के रूप में भी देखा जा सकता है। इसी प्रकार से $7=3+4$ और $3+4=7$ एक ही बात है। (यहां गौर करने की बात यह है कि इस तरह की क्रम विनिमयता का गुण हमारे लिए कोई बड़ी बात नहीं है। लेकिन बच्चे इसकी वजह से भ्रमित हो जाते हैं। उन्हें समीकरण का दूसरा रूप (यानी $3+4=7$) समझना ज्यादा आसान लगता है बनिस्बत पहले (यानी $7=3+4$) के।)
- iv) $5+3=8$ जैसे वाक्य से $5+3=3+5$ जैसे वाक्य पर पहुंचना। (बच्चों को समीकरणों को वाक्यों के रूप में देखने से आगे बढ़कर उन्हें संख्याओं के सम्बंध के रूप में देखना सीखना होगा।)

क्या आप हमारे द्वारा गिनाई गई दिक्कतों से समहत हैं? ये बच्चों के साथ हुए कई वार्तालापों पर आधारित हैं। जिनमें से कुछ हैं:

- सुहानी को $\square = 4+5$ करने को दिया गया। उसने उंगलियों पर गिनकर लिखा $9 = 4+5$, मगर पढ़ा "4 धन 5 बराबर 9"। वह कहती भी है, " $4+5=9$ ज्यादा अच्छा है बजाय $9 = 4+5$ के क्योंकि मुझे इसे (यानी $= 9$ को) उस तरफ रखने की आदत है।"

- जब 6 वर्षीय फ़ातिमा को, $3 + 2 = 2 + 3$ दिया गया, तो उसने कहा, "आप 5 लिखना भूल गए।" फिर उसने लिखा $3 + 2 = 5$ और $2 + 3 = 5$.
- 7 वर्षीय मोहन $3 + 2 = 2 + 3$ को सही मानता है "क्योंकि दोनों में एक ही संख्याएं हैं। सिर्फ $2 + 3$ उल्टा है।"
- एक और बच्ची, दिशा, ने $3 + 2 = 2 + 3$ को बिल्कुल नहीं माना। उसने उसे बदलकर लिखा $3 + 2 + 2 + 3 = 10$.

इन उदाहरणों से पता चलता है कि जब हम बच्चों द्वारा सवाल हल करने के प्रयासों को देखें, तो हमें उस गणितीय भाषा पर भी विचार करना चाहिए जिसमें ये सवाल लिखे जाते हैं। जब हम बच्चों के सामने सवाल और / या हल प्रस्तुत करें, तो जरूरत इस बात की है कि हम इन्हें अलग-अलग रूपों में प्रस्तुत करें। वरना हो सकता है कि बच्चे, मसलन, यह मानने लगें कि '=' चिन्ह तभी लगाया जा सकता है जब उसके पहले एक या ज्यादा गणितीय संक्रियाओं का चिन्ह आ जाए। हो सकता है कि वे यह भी समझने लगें कि सवाल का उत्तर हमेशा 'के बराबर' चिन्ह के बाद ही आता है।

क्या आप बच्चों को गणित सिखाते वक्त सीखने के इस पहलुओं पर विचार करते हैं? निम्नलिखित अभ्यास करते हुए इस पर गौर कीजिए।

E6) आप कक्षा में कैसे व किस मोड़ पर गणितीय प्रतीकों और वाक्यों से बच्चों का परिचय कराते हैं? हमने यहां जो कुछ कहा, उसे पढ़ने के बाद आप इसमें क्या परिवर्तन करना चाहेंगे?

गणितीय 'वाक्य', जिनमें एक ही संक्रिया शामिल हो, सीख लेने के बाद ही बच्चों की मुश्किलें खत्म नहीं हो जाती। उन गणितीय कथनों को पढ़ने में और भी ज्यादा मुश्किलें सामने आती हैं, जिनमें एक से ज्यादा संक्रियाएं शामिल हों। इनमें पूरे समीकरण को सही-सही पढ़ना होगा और संक्रियाओं को एक विशेष क्रम में लागू करना होगा। कोष्ठकों के प्रवेश के साथ ही प्रतीकों की तादाद भी बढ़ जाती है। इस संदर्भ में निम्नलिखित उदाहरण को देखिए।

9 वर्षीय गुल को गणितीय कथनों में कोष्ठकों का उपयोग सिखाया जा चुका था। इन प्रतीकों की उसकी समझ आंकने के लिए उसे $5 + 2 \times 3 = \dots\dots\dots$ हल करने को कहा गया।

प्रश्नकर्ता (प्र.) : बाईं ओर का मान क्या है?

गुल (ग) : 21.

प्र. : कैसे निकाला?

गु : $5 + 2$ बराबर 7 हुआ और 7×3 , 21 होगा।

जब उससे इसी कथन में कोष्ठक लगाने को कहा गया, तो उसने पहली दो संख्याओं को कोष्ठकों में डाल दिया, यानी $(5 + 2) \times 3$ कर दिया। इसमें बाएं से दाएं का वह क्रम भी बरकरार रहा, जिसका वह पालन कर रही थी।

जब उससे पूछा गया कि क्या वह कोष्ठक को कहीं और भी लगा सकती है, तो उसने पूरे कथन को ही कोष्ठक में घेर दिया, यानी $(5 + 2 \times 3)$ कर दिया। सवाल हल करने की उसकी क्रिया, उसकी व्याख्या से मेल खाती थी:

प्र. : तुम कोष्ठक क्यों लगाती हो?

गु. : इससे पता चलता है कि पहले कौन सा करना है।

इससे पता चलता है कि बच्चों को नए प्रतीक शब्द / प्रक्रियाएं बताते वक्त बहुत धैर्य की जरूरत होती है। जरूरत इस बात की होती है कि हम उन्हें नई लिखित भाषा का उपयोग करने के कई अवसर प्रदान करें। वे जिस चीज का उपयोग कर रहे हैं, उसके बारे में, उसके इस्तेमाल के बारे में बात करने के उन्हें कई सारे अवसर मिलने चाहिए।

और अब आपके लिए एक अभ्यास।

E7) आप बच्चों को कोष्ठकों के उपयोग का मकसद व उपयोग का तरीका समझने में कैसे मदद करते हैं?



चित्र 3 : "10 और 1 में क्या अंतर है?"

बच्चों की पहली भाषा से सम्बंधित एक और समस्या यह है कि कई बार वे देखते हैं कि गणित में कुछ ऐसे शब्दों का उपयोग होता है जो उनकी बोलचाल की भाषा से लिए गए हैं, जैसे 'जोड़ना', 'अन्तर', वगैरह। यदि गणित में भी इन शब्दों का अर्थ वही हो, तो बच्चों को कोई मुश्किल पेश नहीं आती। लेकिन अगर गणित में इन शब्दों का उपयोग अलग ढंग से होता है, तो बच्चों को दिक्कत होती है। इस संदर्भ में एक उदाहरण देखिए।

"11 और 6 में क्या अन्तर है?" यह सवाल पूछे जाने पर एक बच्चे ने जवाब दिया कि 11 में दो अंक हैं। जाहिर है, इस जवाब को शिक्षक ने ग़लत माना। एक और बच्चे ने बताया कि 11 सीधा है जबकि 6 घुमावदार है। इसे भी शिक्षक ने ग़लत करार दिया। जाहिर है कि 'अन्तर' शब्द के अर्थ को लेकर बच्चों व शिक्षक में मतभेद था।

प्रारम्भिक कक्षा के स्तर पर यदि बच्चों से 1 में 4 जोड़ने को कहा जाए, तो भी समस्या आ सकती है। जोड़ने का अर्थ यह भी हो सकता है कि 4 को 1 के आगे जोड़ दें, या पीछे जोड़ दें ऐसा करने से जाहिर है कि बच्चों के उत्तर अलग-अलग आएंगे, और कुछ लोग शायद सभी उत्तरों को जायज़ मानें।

इसी से जुड़ा एक अभ्यास।

E8) ऐसे कुछ और उदाहरणों की सूची बनाइए जिनमें शिक्षक द्वारा सोचा गया अर्थ और बच्चों द्वारा समझे गए अर्थ में अन्तर होता है।

इस भाग को ख़त्म करने से पहले आइए प्रमुख मुद्दों को दोहरा लिया जाए। गणित की भाषा संक्षिप्त, सटीक व तार्किक होती है। इन गुणों की वजह से यह एक सशक्त भाषा है। बच्चों को जरूरत है इस भाषा के इस्तेमाल को सीखने की तथा इसकी शक्ति को महसूस करने की। यह जरूरी है कि बच्चे गणितीय व्यंजकों और समीकरणों को पढ़ने तथा उनसे जानकारी हासिल करने की क्षमता विकसित करें। उन्हें यह समझ पाना चाहिए कि समीकरण दरअसल किसी स्थिति, सवाल या घटना को व्यक्त करने का संक्षिप्त तरीका है। इस भाषा को सीखने में बच्चों को मज़ा आए, इसके लिए जरूरी है कि हम इसे धीरे-धीरे सही जगहों पर और काफ़ी अभ्यास के जरिए प्रस्तुत करें। बच्चों को गणित की भाषा बोलने व लिखने के लिए प्रेरित किया जाना चाहिए। इस तरह से बच्चे इसे आत्मसात् कर पाएंगे और इसकी शक्ति को पहचान पाएंगे।

आइए अब इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा, उसको सार रूप में दोहराएं।

11.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बातों पर चर्चा की।

- 1) भाषा के उपयोग का असर बच्चों द्वारा गणित की अवधारणाएं सीखने पर पड़ सकता है क्योंकि भाषा की मदद से ये अवधारणाएं उनके दिमाग में बैठ जाती हैं।
- 2) इबारती सवालों को करते वक्त, गणित की किताबें पढ़ते वक्त या उन्होंने जो कुछ समझा है उसे समझाते वक्त बच्चों को गणितीय भाषा के साथ-साथ रोज़मर्रा की भाषा का भी उपयोग करना होता है।
- 3) बच्चे इबारती सवालों के प्रति किस तरह का रवैया दिखाते हैं, इसका कारण क्या है।
- 4) बच्चों को इबारती सवालों को समझने में और हल करने में मदद कैसे करें।
- 5) किसी ऐल्गोरिद्म को लागू कर पाने का मतलब यह नहीं होता कि उसे सीखा जा चुका है।
- 6) ऐल्गोरिद्म याद रखने के लिए किसी विशिष्ट संदर्भ या अवधि में उपयोगी शॉर्टकट या गुर पकड़ लेना खतरनाक भी हो सकता है। इनकी वजह से बच्चे कई बार ग़लत व्यापकीकरण करते हैं और ग़लत अवधारणा पकड़ लेते हैं।
- 7) गणितीय भाषा से बच्चों का परिचय धीरे-धीरे सही जगह पर, काफ़ी अभ्यास के साथ इस ढंग से कराया जाना चाहिए कि वे इस भाषा को ज़्यादा गहराई से समझने और जानने लगें।

11.6 अभ्यासों पर टिप्पणियां

- E2) (क) एक ही गणितीय कथन कई अलग-अलग स्थितियों को निरूपित कर सकता है।
 (ख) एक ही स्थिति को अलग-अलग इबारती सवालों के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।
 (ग) इबारती सवालों को किसी ऐल्गोरिद्मी तरीके से प्रस्तुत नहीं किया जाता है। इसलिए इन्हें समझने में देर लगती है।
 कई अन्य कारण भी हो सकते हैं, जो बच्चों से सम्पर्क के दौरान शायद आपको नज़र आएंगे।
- E3) मसलन, आप ऐसे सवाल बना सकते हैं जिनमें कुछ खिलाड़ियों के बीच 4-4 पत्ते बांटने हों, या किसी कक्षा के लिए बेंचों की संख्या पता लगाना हो, वगैरह।
- E4) ' $4 + 3 = 7$ ' को निम्नानुसार कम से कम दस तरीकों से व्यक्त किया जा सकता है।
- 1) चार और तीन सात।
 - 2) चार और तीन जुड़कर सात होते हैं।
 - 3) चार जमा तीन सात बनेंगे।
 - 4) चार और तीन का जोड़ सात होता है।
 - 5) चार और तीन का योग सात होता है।
 - 6) सात, चार से तीन ज़्यादा है।
 - 7) चार, सात से तीन कम है।
 - 8) चार में तीन जोड़ें तो सात आएगा।
 - 9) चार धन तीन बराबर सात।
 - 10) चार धन तीन सात होंगे।
- E5) उदाहरणों से एक बात ज़ाहिर है कि ऐसे बच्चे, और कई वयस्क भी, जो जल्दी से किसी सवाल को सही-सही हल कर देते हैं, कई बार उसमें शामिल गणित को नहीं जानते। विधि

को ठीक से लागू कर पाने का मतलब यह नहीं है कि हम उन संक्रियाओं को समझते हैं जिनके लिए ये विधियाँ बनी हैं। बतौर शिक्षक हमें इस बात के प्रति सचेत रहना चाहिए।

E6) इस बारे में सोचिए कि आप गणितीय प्रतीकों और कथनों को कैसे प्रस्तुत करते हैं। सोचते वक़्त इस बात पर ध्यान दीजिए कि बच्चों को इन प्रतीकों का अर्थ तथा उनके परस्पर सम्बंधों की समझ विकसित करना है।

E7) आप यह लिख सकते हैं कि गणित की प्रतीकात्मक भाषा की समझ हासिल करने के लिए बच्चों को अवसर प्रदान करने के लिए क्या किया जाना चाहिए। ऐसे कौन से अनुभव होंगे जिनसे बच्चों को कोष्ठक सहित गणितीय समीकरण और व्यंजक समझने में मदद मिलेगी?

E8) बतौर उदाहरण, बच्ची यह सोच सकती है कि $4(-5) = -1$ होगा। उसने दरअसल कोष्ठक को अनदेखा कर दिया है, क्योंकि वह उसका अर्थ समझ नहीं पाई।

आप ऐसे कुछ और उदाहरण सोच सकते हैं।

शब्दावली

अभाज्य संख्या	prime number
आत्मसात्	absorb
इबारती सवाल	word / verbal problem
ऋणात्मक संख्या	negative number
कोष्ठक	bracket
चर	variable, unknown
धनात्मक संख्या	positive number
परिमाप	perimeter
पूर्ण संख्या	whole number
पूर्णांक	integer
पूर्वधारणा	assumption
बीजगणित	algebra
विषम संख्या	odd number
व्यापकीकृत अंकगणित	generalised arithmetic
शून्येतर	non-zero
सचिन्ह संख्या	signed number
संप्रेषण	communication
सामान्य	common

खंड 1 और 2 में दी गई शब्दावली भी देखिए।